

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**BIFURCAÇÃO E OSCILAÇÕES AUTO-INDUZIDAS  
EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS EM DIFUSORES RADIAIS**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SERGIO PETERS**

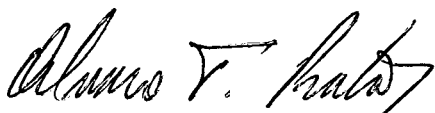
**FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1994**

BIFURCAÇÃO E OSCILAÇÕES AUTO-INDUZIDAS  
EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS EM DIFUSORES RADIAIS

SERGIO PETERS

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

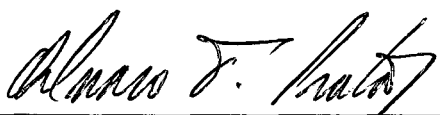


Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.  
Orientador



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, D.Sc.  
Coordenador do Curso


BANCA EXAMINADORA:



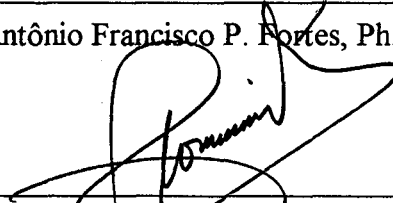
Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.



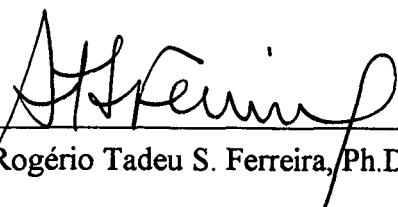
Prof. Antônio Francisco P. Fortes, Ph.D.



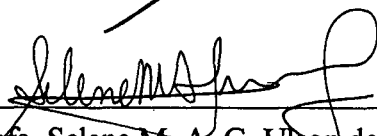
Prof. Átila Pantaleão S. Freire, Ph.D.



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.



Prof. Rogério Tadeu S. Ferreira, Ph.D.



Profa. Selene M. A. G. Ulson de Souza, D.Sc.

**À minha querida esposa Marcia pela paciência e compreensão  
nas longas etapas deste trabalho**

**Ao meu filho Pedro Henrique pelas horas de ausência**

**Aos meus pais Felipe e Cecilia pela formação e incentivo.**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu mestre e amigo Álvaro Prata pelas inúmeras lições de vida que me permitiu perceber ao longo destes anos de convivência.

Aos professores Fábio, Maliska e Rogério pelo acompanhamento e pelas várias contribuições a este trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela paciência na leitura e pelas sugestões para melhorar a redação final.

Aos amigos Jauber, Langer e Gasche pela presença ao meu lado em todas as horas.

A Nice pela boa vontade e paciência com que colaborou com a nossa família.

Ao incentivo dos amigos Nelcy, Ivan e Júlio que me permitiram uma maior dedicação a esta Tese.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A todos que colaboraram na realização deste trabalho.

## ÍNDICE

	pag.
RESUMO.....	iii
ABSTRACT.....	v
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	xi
NOMENCLATURA.....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO SOBRE ESCOAMENTOS RADIAIS.....	5
3. TEORIA DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA.....	13
3.1 Introdução.....	13
3.2 Definições.....	16
3.2.1 escoamento Básico.....	17
3.2.2 Classificação de Estabilidade.....	17
3.2.3 Teoria Linear versus Teoria Não Linear.....	19
3.2.4 Problema Espectral.....	21
4. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	24
5. VALIDAÇÃO DA METODOLOGIA DE CÁLCULO.....	32
5.1 Introdução.....	32
5.2 Bifurcação em Expansão Plana.....	32
5.3 Estabilidade Linear em escoamento sobre Prisma Quadrado.....	44

<b>6. ESCOAMENTO RADIAL COM ALIMENTAÇÃO RADIAL.....</b>	<b>62</b>
6.1 Introdução.....	62
6.2 Resultados obtidos com Novas Funções de Interpolação.....	63
6.3 Resultados obtidos com a Teoria Linear da Estabilidade Hidrodinâmica.....	76
6.4 Estudo do Difusor Radial de Mochizuki e Yang (1985).....	82
 <b>7. ESCOAMENTO RADIAL COM ALIMENTAÇÃO AXIAL.....</b>	 <b>84</b>
7.1 Introdução.....	84
7.2 Formulação do Problema.....	85
7.3 Equações Governantes.....	86
7.4 Histórico das Implementações da Metodologia.....	89
7.5 escoamento e Transferência de Calor.....	90
 <b>8. CONCLUSÕES.....</b>	 <b>107</b>
 <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	 <b>112</b>
 <b>APÊNDICES.....</b>	 <b>119</b>
A. Soluções Analíticas para escoamentos Puramente Radiais.....	119
B. Extensão da Interpolação QUICK Consistente para Malhas Não Uniformes.....	125
C. Extensão da Interpolação MSOU para Malhas Não Uniformes.....	131
D. Resumo sobre a Discretização em Malha Colocalizada.....	135



## RESUMO

O estudo teórico da estabilidade hidrodinâmica de escoamentos vem evoluindo segundo as disponibilidades de recursos computacionais. Os primeiros trabalhos desta área datam do século passado e situavam-se em torno de escoamentos potenciais simples. Nesta fase inicial houve um grande desenvolvimento matemático, onde uma série de postulados foram definidos, e conseguiu-se entender qualitativamente diversas questões relacionadas à estabilidade.

No presente trabalho estudaram-se alguns aspectos da estabilidade hidrodinâmica dos escoamentos radiais, através da teoria da estabilidade linear. Apresenta-se a equação das pequenas perturbações completa sem as simplificações usuais adotadas na equação de Orr-Sommerfeld. O enfoque deste trabalho consiste no estudo da estabilidade hidrodinâmica de problemas físicos de interesse tecnológico. Esta motivação nasceu após a revisão de alguns trabalhos como Pilichi (1990) e Langer (1991) relativos a estudos em difusores radiais e Cherdron et alli (1978) relativos a expansões súbitas em canais retos. Notou-se que havia a necessidade de se explicar certos fenômenos possivelmente relacionados à estabilidade do escoamento.

Os trabalhos de Cherdron et alli (1978), Sobey (1985) e Shapira et alli (1990), relativos a expansões súbitas em canais retos, e de Kelkar e Patankar (1989), relativo à estabilidade linear do escoamento sobre o prisma quadrado, foram usados para validação da teoria utilizada. Primeiramente estudou-se o escoamento em difusores com expansão súbita de área. Tal escoamento foi tema de uma investigação experimental por Cherdron et alli (1978) e de uma investigação numérica por Sobey (1985), dentre outras. Uma comparação entre estes resultados valida a metodologia do presente trabalho, embora haja divergências entre os dois autores citados.

Diversas metodologias de discretização das equações diferenciais do movimento foram implementadas para os estudos do escoamento em difusores radiais. Destaca-se o uso da malha colocalizada e desencontrada, esquemas de interpolação Upwind, Lei da Potência, QUICK consistente (Hayase et alli, 1992) e MSOU (Tamamidis e Assanis, 1993). Um dos modelos apresentados tem aplicação exclusiva em escoamentos radiais e contempla a compensação da variação na área de passagem do fluido no interior do difusor.

O escoamento radial com alimentação radial, estudado por Langer (1991) e Oliveira (1992), foi analisado utilizando-se modelos numéricos considerados mais precisos. Neste caso obtiveram-se resultados novos, dentre estes um segundo ponto de bifurcação, caracterizado como uma bifurcação de Hopf, ou seja, captou-se uma transição do escoamento assimétrico estacionário para o escoamento transiente.

O escoamento radial com alimentação axial estudado por Pilichi (1990) foi também investigado. Tais escoamentos apresentam uma grande complexidade de efeitos, tais como o desvio brusco na direção da corrente de fluido e a expansão gradativa de área de passagem associada ao gradiente de pressão adverso. Buscou-se entender melhor este escoamento radial

ibém

com o intuito de captar numericamente a distribuição experimental do número de Nusselt local obtido por Pilichi (1990). Conseguiu-se esclarecer alguns aspectos desta distribuição, utilizando-se as chamadas metodologias precisas, baseadas na interpolação via QUICK e MSOU. Segundo a metodologia numérica com interpolação QUICK, o escoamento que gera a distribuição experimental do número de Nusselt captada por Pilichi é um padrão transiente com diversos vórtices em movimento.

Verificou-se que nos regimes de transição entre o escoamento laminar e turbulento, como o investigado aqui, os escoamentos são extremamente sensíveis a qualquer variação na metodologia numérica empregada. Desta forma é necessário muita cautela para se atribuir, a uma dada solução das equações que governam o escoamento, a configuração definitiva.

Com a evolução crescente dos computadores, existe uma investigação numérica gradativa de escoamentos bastante complexos, de onde obtém-se vários pontos de bifurcação adentrando na chamada região de transição do escoamento. Através deste desenvolvimento, espera-se, num futuro próximo, um melhor entendimento do escoamento turbulento. Para tal, certamente necessitar-se-á de discretizações muito mais refinadas que as usadas presentemente, bem como de computadores bem mais eficientes.

## ABSTRACT

In the present work some aspects of the hydrodynamic stability of radial flows were investigated using the Theory of Linear Stability. The flow field was decomposed as a sum of a basic flow and a disturbance field and use was made of the full perturbation equation without the simplifications usually adopted in the Orr-Sommerfeld equations. The motivation for the thesis came after reviewing the works of Pilichi (1990) and Langer (1991) about flows in radial difusors, and Cherdron et alli (1978) about flows in ducts with sudden expansions. Those are situations of high technological interest where flow instabilities play a major role.

The contributions of Cherdron et alli (1978), Sobey (1985) and Shapira et alli (1990), relative to ducts with sudden expansions, and Kelkar and Patankar (1989), relative to the flow over a square cylinder, were used for validation of the methodology adopted here.

Several methodologies of discretization of the differential equations of the flow were implemented. They include the use of colocated and staggered grids and schemes of interpolation like Upwind, Power Law, QUICK (Hayase et alli, 1992) and MSOU (Tamamidis and Assanis, 1993). A methodology that has exclusive application on radial flows was introduced; it compensates for the variation of cross sectional area within the radial difusor. Those methodologies were applied in radial flow with axial and radial feeding.

The radial flow with radial feeding, studied by Langer (1990) and Oliveira (1992), was revisited making use of more accurate numerical models, and new results were obtained. These include a second bifurcation point - Hopf Bifurcation - that is a transition between steady asymmetric flow to non steady flow. The radial flow with axial feeding studied both numerically and experimentally by Pilichi (1990), was also revised. This flow presents a great complexity of effects, like the sudden deviation in the mainstream and a strong adverse pressure gradient caused by cross sectional area expansion.

Some aspects of local Nusselt number distribution measured by Pilichi (1990) were clarified making use of more accurate methodologies associated with the interpolation schemes QUICK and MSOU. It was disclosed that the flow that generates the experimental distribution of the Nusselt number captured by Pilichi has a non periodic transient pattern with several vortices in motion.

In the transition between laminar and turbulent flow, like the ones investigated here, flows are extremely sensitive to any variation in the numerical methodology applied. So it is necessary a lot of caution in associating a numerical solution of the governing equations with the physical problem under consideration.

## LISTA DE FIGURAS

	pag.
Figura 2.1 - Esquema experimental para simular o difusor radial com alimentação radial	06
Figura 2.2 - Domínio computacional para captar-se o difusor radial com alimentação radial.	06
Figura 2.3 - Esquema do difusor radial com alimentação axial.	08
Figura 2.4 - Distribuição de número de Nusselt médio (Todescat, 1988).	08
Figura 2.5 - Distribuição local de número de Nusselt (Pilichi, 1990).	09
Figura 2.6 - Linhas de corrente obtidas numericamente por Pilichi (1990).	10
Figura 2.7 - Bifurcações entre escoamento simétrico e assimétrico observadas por Langer (1991).	11
Figura 3.1 - Classificação de estabilidade segundo Joseph (1976).	19
Figura 4.1 - Volume de controle interno ao domínio de cálculo.	25
Figura 5.1 - Domínio computacional da expansão plana de Cherdron e colaboradores (1978).	32
Figura 5.2 a) - Soluções simétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com $rx=2$ .	35
Figura 5.2 b) - Soluções simétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com $rx=3$ .	35
Figura 5.3 a) - Soluções assimétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com $rx=2$ .	36
Figura 5.3 b) - Soluções assimétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com $rx=3$ .	36
Figura 5.4 a) - Evolução de uma perturbação $v$ aplicada ao escoamento simétrico para $Re=100$ e $rx=2$ .	38
Figura 5.4 b) - Evolução temporal do autovalor menos estável $\beta$ para $Re=100$ e $rx=2$ .	38
Figura 5.4 c) - Evolução temporal da energia média global das perturbações $\epsilon$ para $Re=100$ e $rx=2$ .	38
Figura 5.5 a) - Evolução de uma perturbação $v$ aplicada ao escoamento simétrico para $Re=500$ e $rx=2$ .	39
Figura 5.5 b) - Evolução temporal do autovalor mais instável $\beta$ para $Re=500$ e $rx=2$ .	39
Figura 5.5 c) - Evolução temporal da energia global das perturbações $\epsilon$ , $Re=500$ e $rx=2$ .	39
Figura 5.6 - Avaliação do autovalor $\beta$ para canal com $rx=3$ , considerando padrões simétricos e assimétricos.	40
Figura 5.7 - Diagrama de bifurcação esquemático com dois pontos de bifurcação.	42

Figura 5.8	- Domínio de cálculo do escoamento sobre prisma quadrado (Kelkar, 1989).	44
Figura 5.9	- Escoamentos básicos estacionários sobre o prisma quadrado para os $Re$ 10, 40, 50 e 100.	48
Figura 5.10	- Ampliação do escoamento sobre prisma quadrado na região da borda de ataque para $Re=50$ .	49
Figura 5.11	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo, para $Re=10$ obtida com Modelo 0.	50
Figura 5.12	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo, para $Re=30$ obtida com Modelo 0.	50
Figura 5.13	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo para $Re=40$ obtida com Modelo 0.	51
Figura 5.14	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo para $Re=50$ obtida com Modelo 0.	51
Figura 5.15	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo para $Re=100$ obtida com Modelo 0.	52
Figura 5.16	- Evolução temporal de $v$ versus $u$ para os números de Reynolds 10, 30, 40, 50 e 100.	53
Figura 5.17	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo, para $Re=40$ obtido com Modelo 4.	55
Figura 5.18	- Variação de $u$ , $v$ , $\epsilon$ e $\beta$ com tempo, para $Re=50$ obtido com Modelo 4.	55
Figura 5.19	- Evolução da taxa de crescimento $\beta$ com o número de $Re$ para escoamento sobre prisma quadrado.	56
Figura 5.20	- Assimetria inicial das duas bolsas de recirculação posteriores ao prisma quadrado, $Re=50$ (Modelo 0).	57
Figura 5.21	- Evolução temporal do campo de linhas de corrente para o escoamento sobre um prisma quadrado, $Re=50$ (Modelo 0).	58
Figura 5.22	- Evolução temporal de $V$ no ponto 1 obtida com Lei da Potência para $Re=50$ .	61
Figura 5.23	- Evolução temporal de $V$ no ponto 1 obtida com interpolação QUICK para $Re=50$ .	61
Figura 5.24	- Evolução temporal de $V$ no ponto 1 obtida com interpolação MSOU para $Re=50$ .	61
Figura 6.1	- Esquema do difusor radial com alimentação radial.	63
Figura 6.2	- Comparações entre a configuração de escoamento obtidas com diferentes modelos aplicados ao difusor radial com alimentação radial para $Re=100$ .	66
Figura 6.3	- Configuração de escoamento obtida com formulação em $U$ e $rV$ para $Re=100$ .	66
Figura 6.4	- Escoamentos simétricos em difusor radial com alimentação radial; formulação $U$ e $rV$ e interpolação QUICK consistente (modelo 3).	67
Figura 6.5	- Escoamentos assimétricos em difusor radial com alimentação radial obtidos com o Modelo 2 (malha colocalizada e interpolação QUICK consistente).	69

Figura 6.6	- Escoamentos assimétricos em difusor radial com alimentação radial obtidos com o Modelo 3 (malha colocalizada, formulação em U e rV e interpolação QUICK consistente).	70
Figura 6.7	- Comportamento temporal de componentes de velocidade transversal ao escoamento radial para $Re=1000$ .	71
Figura 6.8	- Comportamento temporal de componentes de velocidades transversais para $Re=1000$ (Modelo 4).	72
Figura 6.9	- Escoamento para $Re=1000$ no difusor radial com alimentação radial obtido com o Modelo 4 (malha desencontrada e interpolação QUICK consistente).	73
Figura 6.10	- Comportamento temporal de componentes de velocidades transversais para $Re=1000$ (Modelo 5).	74
Figura 6.11	- Escoamento para $Re=1000$ no difusor radial com alimentação radial obtido com o Modelo 5 (malha desencontrada e interpolação MSOU).	75
Figura 6.12	- Autovalores mais instáveis para escoamento radial com alimentação radial, obtido com Modelo 2 (interpolação QUICK consistente em malha colocalizada).	79
Figura 6.13	- Comportamentos temporais das perturbações u e v e do autovalor $\beta$ para o escoamento radial com alimentação radial, $Re=600$ (Modelo 4).	80
Figura 6.14	- Comportamentos temporais das perturbações u e v e do autovalor $\beta$ para o escoamento radial com alimentação radial, $Re=1000$ (Modelo 4).	80
Figura 6.15	- Autovalores mais instáveis para o escoamento no difusor radial com alimentação radial, obtido com Modelo 4 (interpolação QUICK consistente em malha desencontrada).	81
Figura 6.16	- Escoamento radial equivalente ao de Mochizuki e Yang (1985) com $Re_M = 34$ e $s/d_1 = 0,075$ .	83
Figura 7.1	- Domínio de cálculo para simulação do escoamento em difusor radial com alimentação axial.	86
Figura 7.2	- Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 5400 pontos; $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ .	92
Figura 7.3	- Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ .	92
Figura 7.4	- Campo de linhas de corrente para malha de 12800 pontos com o Modelo 1, $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ .	94
Figura 7.5	- Campos de vorticidade na região do difusor radial com alimentação axial obtidos para o escoamento apresentado na figura 7.4.	95
Figura 7.6	- Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 5400 pontos; $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ .	97

Figura 7.7	- Distribuição instantânea do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ .	98
Figura 7.8	- Campos de linhas de corrente obtidos com o Modelo 2 para malha de 12800 pontos.	99
Figura 7.9	- Campos de linhas de corrente obtidos com o Modelo 3 para malha de 12800 pontos.	100
Figura 7.10	- Comportamento da componente U de velocidade transversal, para os pontos 1 e 2 (vide figura 7.1) para $Re'=4595$ , $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ (Modelo 2).	101
Figura 7.11	- Distribuição instantânea e média do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; para $Re'=2727$ , $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ (Modelo 4).	102
Figura 7.12	- Distribuição média temporal do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; para $Re'=2727$ , $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ (Modelo 2).	103
Figura 7.13	- Seqüência temporal de linhas de corrente para o escoamento no difusor radial com alimentação axial para $Re'=2727$ , $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ (Modelo 4).	103
Figura 7.14	- Comportamento transiente da componente transversal da velocidade, U, nos pontos 1 e 2 indicados na figura 7.2; $Re'=2727$ , $s/d=0,07$ e $D/d=3,15$ (Modelo 4).	104
Figura A.1	- Geometria do escoamento radial.	119
Figura A.2	- Distribuição radial de pressão para o escoamento viscoso no difusor radial.	121
Figura A.3	- Distribuição radial de pressão para o escoamento invíscido em difusor radial.	123
Figura B.1	- Volume de controle para a variável $\phi_i$ .	126
Figura B.2	- V.C. no contorno do domínio de solução para malha colocalizada.	129
Figura B.3	- V.C. no contorno do domínio de solução, para a componente U de velocidade em malha desencontrada.	130
Figura C.1	- V.C. para $\phi_i = U_i$ em malha desencontrada.	132
Figura D.1	- Volumes de controle elementares.	136
Figura D.2	- Interpolação da componente de velocidade U na face e.	138



**LISTA DE TABELAS**

		pág.
Tabela 5.1	Valores de Reynolds crítico para escoamento em uma expansão plana.	42
Tabela 7.1	Condições de contorno adimensionalizadas, conforme figura 7.2.	87
Tabela 8.1	Escoamento em expansão plana (razão de expansão igual a três).	109
Tabela 8.2	Escoamento sobre prisma quadrado.	109
Tabela 8.3	Escoamento radial com alimentação radial.	109
Tabela 8.4	Escoamento radial com alimentação axial.	110

## NOMENCLATURA

$a_1$	Coeficiente do método dos volumes finitos, eq. (4.6).
$A_i$	Coeficiente de ajuste convecção/difusão de acordo com a lei da potência.
$A_p^+$	Coeficiente nodal principal sem o efeito de subrelaxação.
$c$	Coeficiente de integração temporal, eq. (4.5).
$d, D$	Espaçamento entre placas antes e depois da expansão no trabalho de Sobey e Drazin (1986).
$d_1$	Diâmetro do orifício no difusor radial com alimentação axial.
$d_2$	Diâmetro externo da palheta do difusor radial com alimentação axial.
$D_i$	Termo difusivo discretizado.
$f$	Função de $\lambda$ e $\omega$ que fornece a solução estacionária de eq. (3.1).
$F_i$	Fluxo mássico em cada face de volume de controle.
$f_\lambda$ e $f_\sigma$	Derivadas parciais de $f$ com respeito a $\lambda$ e $\sigma$ , respectivamente.
$g$	Grandeza genérica, eq. (4.5).
$\vec{G}$	Forças de Campo, eq. (3.10).
$h$ e $H$	Altura do canal de Cherdron et alli (1978), respectivamente na entrada e saída.
$J_x$ e $J_y$	Fluxos totais convectivos e difusivos nas direções $x$ e $y$ , eqs. (4.2) e (4.3).
$k$	Condutividade térmica.
$L$	Dimensão da face do prisma quadrado, figura 5.8.
$Nu$	Número de Nusselt, eq (7.11).
$Nu_m$	Número de Nusselt médio avaliado por Todescat (1988) sobre as regiões do orifício e do disco conectado ao orifício.
$Nu'$	Número de Nusselt de Pilichi (1990), eq. (7.7).
$\bar{Nu}$	Número de Nusselt local médio no tempo.
$p$	Campo de perturbações de pressão.
$P$	Campo de pressão total.
$P_b$	Campo de pressão básica.
$p_n$	Autofunções correspondentes a perturbação de pressão, eq. (3.18).
$Pr$	Número de Prandtl do fluido, $Pr = \nu / \alpha$ .
$Q$	Parâmetro para definição de campo inicial de perturbações, eq. (5.20).
$q''$	Fluxo de calor ( $W/m^2$ ).
$rx$	Razão ( $rx=H / h$ ) da expansão plana de Cherdron et alli (1978).
$Re$	Número de Reynolds dos vários escoamentos presentes neste trabalho, eqs. (5.4), (5.14), (6.4) e (7.5).

$Re'$	Número de Reynolds segundo Cherdron et alli (1978), eq. (5.8) e segundo Pilichi (1990), eq. (7.6).
$Re_e$	Número de Reynolds definido por Pilichi (1990), equivalente a $Re'$ , eq. (7.6).
$Re_o$	Reynolds limite de escoamento globalmente monotonicamente estável.
$Re_G$	Reynolds limite de escoamento globalmente estável.
$Re_L$	Reynolds limite de estabilidade condicional, ou somente Reynolds limite.
$s$	Espaçamento entre os discos do difusor radial, figura 6.1 e 7.2.
$S$	Espaçamento entre discos do difusor radial adimensional.
$S^*$	Termo fonte da equação da conservação da quantidade de movimento.
$S_c$	Parcela de $S^*$ que permanece no termo fonte, eq. (4.12).
$S_p$	Parcela de $S^*$ linearizada conforme, eq. (4.12).
$t$	Tempo dimensional.
$T$	Temperatura dimensional.
$\tilde{u}$	Campo de perturbações de velocidades, eq. (3.10).
$\bar{U}$	Campo total de velocidades, eq. (3.10).
$\bar{U}_b$	Campo de velocidades básicas, eq. (3.10).
$\bar{U}_s$	Campo de velocidades nas fronteiras do domínio.
$\bar{U}_0$	Campo inicial de velocidades.
$\tilde{u}_0$	Campo inicial de perturbações de velocidades.
$u_{max}$	Velocidade máxima na secção de expansão ( $x=0,5\ r_x$ , Cherdron et alli, (1978).
$u_{max}$	Velocidade máxima na entrada do canal ( $x=0$ , Cherdron et alli, 1978).
$u_{in}$	Velocidade uniforme incidente sobre o prisma quadrado.
$u, v, p$	Componentes adimensionais de perturbações de velocidades e pressão.
$U, V, P$	Componentes adimensionais de velocidades e pressão.
$U_b, V_b, P_b$	Componentes adimensionais do campo básico de velocidades e pressão.
$u^*, v^*, p^*$	Componentes dimensionais das perturbações de velocidades e pressão.
$U^*, V^*, P^*$	Componentes dimensionais de velocidades e pressão.
$U_b^*, V_b^*, P_b^*$	Componentes dimensionais do campo básico de velocidades e pressão.
$v_1, v_2$	Picos de uma componente qualquer de perturbação, eq. (5.9).
$x^*, y^*$	Valores dimensionais respectivamente para as coordenadas longitudinal e transversal para escoamentos em coordenadas cartesianas.
$x^*, r^*$	Valores dimensionais respectivamente para as coordenadas transversal e radial para escoamentos em coordenadas cilíndricas.
$x, y, r$	Valores adimensionalizados de $x^*, y^*$ e $r^*$ , respectivamente.
$X_L, Y_L$	Dimensões totais do domínio de cálculo computacional, figura 5.8.

## Símbolos gregos

$\alpha$	Difusividade térmica.
$\chi, \delta$	Números reais arbitrários e positivos.
$\beta, \beta_R$	Autovalor real da equação das perturbações, define a evolução da amplitude destas.
$\beta_I$	Componente imaginária do autovalor das perturbações, que define os períodos de oscilação destas perturbações em problemas não-estacionários.
$\beta_n$ e $\xi_n$	Autovalores e autofunções correspondentes, eq. (3.17).
$\Delta$	Incremento finito.
$\Delta\tau$	Incremento de tempo dimensional.
$\Delta z_{\max}$	Profundidade máxima de desgaste devida a sublimação do Naftaleno, Pilichi (1990).
$\zeta$	Função de assimetria, eq. (5.10).
$\psi$	Função corrente adimensional.
$\rho$	Massa específica.
$\tau$	Tempo adimensional, conforme eqs. (5.4), (5.14), (6.4) e (7.5).
$\omega$	Vorticidade adimensional.
$\lambda$	Parâmetro que define o comportamento de um fenómeno físico genérico, eq. (3.1).
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido.
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido.
$\lambda_0, \sigma_0$	Solução estacionária arbitrária da eq. (3.1).
$\sigma$	Campo solução genérico da eq. (3.1) para um parâmetro $\lambda$ genérico.
$\delta\lambda$	Incremento infinitesimal de $\lambda$ .
$\delta\sigma$	Incremento infinitesimal de $\sigma$ .
$\varepsilon$	Energia média global das perturbações, eq. (3.7).
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido.
$\phi$	Grandeza genérica, eq. (4.1).
$\rho$	Massa específica do fluido.
$\Gamma$	Coefficiente do termo difusivo, equivalente à viscosidade.
$\vartheta$	Volume do domínio de cálculo, eq. (3.7).
$\Omega$	Período de oscilação adimensional.

## Subíndices

b	Índice referente ao escoamento básico.
i	Índice referente a fronteira do volume de controle : w, e, n, s.
I	Índice referente aos pontos nodais : W, E, N, S e P.
e	Índice referente a entrada do fluido no difusor radial.
p	Índice referente a parede da palheta no difusor radial.
o	Valor inicial de um campo de velocidades.
s	Indica o valor da superfície do domínio de cálculo.
m	Índice referente a mistura.
	Avalia-se o máximo dos valores internos às barras duplas.
viz	Indica genericamente a vizinhança de um ponto nodal qualquer.

## Superíndices

0	Índice relativo às grandezas do instante anterior.
+ e -	Indica o sentido do fluxo convectivo no V.C.
k	Nível iterativo.
t	Instante de tempo.

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

A estabilidade do escoamento de um fluido está associada à sua capacidade em amortecer perturbações externas a que ele está submetido. Como exemplo pode-se citar o caso do escoamento em duto liso circular, onde se tem um escoamento estável até  $Re=2000$  (número de Reynolds baseado no diâmetro do duto) e, a partir deste valor, pequenas perturbações passam a influenciar na configuração do escoamento. Na ausência destas perturbações o escoamento se mantém laminar mesmo para números de Reynolds muito acima de 2000. Naturalmente para se obter em tais escoamentos experimentalmente são necessários cuidados extremos para minimizar as perturbações a que o fluido está submetido, ou seja, um alto grau de acabamento da superfície interna do duto, um alto isolamento anti-vibratório do experimento, etc. Por outro lado, o escoamento citado pode ser obtido por simulação numérica em regime laminar até números de Reynolds muito mais altos que os limites experimentais. Este é um pequeno exemplo da dificuldade que existe para se fazer uma simulação numérica de um experimento. No experimento existem muitas formas de perturbações, enquanto que a simulação numérica é quase isenta de perturbações, ou seja, tem-se um duto perfeitamente liso e totalmente isento de perturbações externas. Podem ocorrer apenas as chamadas perturbações numéricas, decorrentes da metodologia empregada e das operações em ponto flutuante envolvidas no processo. Parafraseando Landau (1982), sabe-se que um escoamento para existir deve satisfazer a equação de Navier-Stokes e, adicionalmente, ser estável. Assim, é fundamental que se analise cuidadosamente qualquer solução numérica obtida, antes de defini-la como solução de um problema físico.

Um problema de escoamento de fluidos deve a rigor ser resolvido através da equação de Navier-Stokes completa. Porém, na construção de modelos, é recomendável a utilização de hipóteses simplificativas. Embora a simplificação das equações governantes seja, muitas vezes, condição necessária para a solução do problema, deve-se ter cautela para que o escoamento a ser modelado não seja violado pelo uso de premissas demasiadamente restritivas. A possibilidade de uma determinada configuração de escoamento ser instável exige cuidados adicionais na adoção de hipóteses simplificativas. Há por exemplo uma forte tendência de se considerar simétricos escoamentos associados a geometrias simétricas. Neste contexto tem-se o escoamento em difusores radiais obtidos por Raal (1978), cujo domínio de cálculo foi restrito à metade do canal, impondo-se ao escoamento uma condição de simetria tanto geométrica como axissimétrica. Algum tempo depois, Mochizuki e colaboradores (1983 e 1985) observaram a existência de soluções periódicas, enquanto que Langer (1991) obteve bifurcação de soluções originando configurações assimétricas, provando que a hipótese de simetria geométrica não é válida.

Representam os difusores, de um modo geral uma classe de escoamentos que apresenta uma instabilidade intrínseca à sua geometria. As expansões de secção transversal, súbita ou gradativa, constituem uma perturbação constante imposta ao escoamento. Nestes escoamentos é possível encontrar padrões assimétricos em geometrias simétricas, comportamento oscilatório periódico e bifurcações de solução. Apesar do grande número de situações em engenharia associadas a escoamentos em difusores, tal configuração permanece pouco explorada no contexto da estabilidade hidrodinâmica.

A motivação para a presente tese nasceu após revisão de alguns trabalhos como Pilichi (1990) e Langer (1991), relativos a estudos em difusores radiais e Cherdron, Durst e Whitelaw (1978), relativos a expansões súbitas em canais retos. Notou-se que havia a necessidade de se explicar certos fenômenos possivelmente relacionados à estabilidade do escoamento.

No trabalho de Pilichi (1990) inesperados picos locais no coeficiente de transferência de calor, embora tenham sido detectados experimentalmente, não foram capturados por uma formulação numérica estacionária, indicando que possivelmente o fenômeno tivesse características transitórias. Um dos tópicos de pesquisa aqui propostos é explorar tal fenômeno e determinar a transição entre regime estacionário estável e outras configurações que poderão ser estacionárias ou transientes. Tais pontos de bifurcação em escoamentos radiais foram originalmente detectados por Langer (1991).

No mesmo contexto, Cherdron et alli (1978), constataram experimentalmente diferentes padrões de escoamento em canais retos com expansões súbitas. Surgiram os padrões simétricos, assimétricos, regiões de recirculação oscilatórias e ejeções de vórtices da região de expansão que tendiam a diminuir de tamanho e aumentar sua frequência de formação com o crescimento do número de Reynolds. Este último comportamento indica o início do regime turbulento. Objetiva-se aqui determinar numericamente estes vários pontos de bifurcação do escoamento de Cherdron et alli (1978), captando cada etapa do processo de transição laminar-turbulento.

O estudo da instabilidade e bifurcação de escoamentos permite que processos de transferência de calor sejam otimizados. A troca térmica entre uma parede e um fluido escoando paralelamente a ela é sensivelmente incrementada através da desestabilização do escoamento. Exemplos de trabalhos que exploram tais mecanismos com ganhos na transferência de calor são Sparrow e Kalejs (1977), Patera e Mikic (1986), Koslu et alli (1988), Maughan e Incropera (1990) e Langer, Prata e Ferreira (1993b). Hoje é grande o interesse de engenheiros térmicos em novas alternativas que possibilitam uma maior eficiência nos processos de transferência de calor, o que fornece motivação adicional para o estudo da estabilidade em difusores radiais.

Para estudar numericamente esta gama de problemas envolvendo bifurcação de solução é necessária a implementação de metodologias adequadas à solução da equação de Navier-Stokes e das equações associadas ao problema da estabilidade hidrodinâmica dos escoamentos. Neste sentido implementar-se-ão alguns modelos baseados no método dos volumes finitos proposto por Patankar (1980). A primeira implementação adicional à metodologia proposta por Patankar é a discretização transiente proposta por Crank e Nicolson (1953), na qual a discretização espacial é

feita num tempo intermediário entre o instante anterior e o posterior à integração temporal, referenciado no presente trabalho como Modelo 0. Como metodologias alternativas implementaram-se três modelos de discretização baseados em malha colocizada. O primeiro modelo segue a proposta de Majumdar (1988) e resolve apenas o domínio computacional interno ao duto, ignorando regiões sólidas. Este primeiro modelo em malha colocizada com interpolação via Lei da Potência é aqui referenciado como Modelo 1. No segundo é incrementada uma função de interpolação mais precisa para as variáveis nas faces, isto é feito através do esquema QUICK consistente, proposto por Hayase et alii (1992), que é referenciado como Modelo 2. Alternativamente propõe-se resolver equações específicas para simulação do escoamento radial, através das variáveis  $U$  (velocidade transversal) e  $rV$  (produto da posição radial pela velocidade radial) também com interpolação QUICK consistente. Tal modelo é referenciado como Modelo 3. Utilizaram-se também duas implementações em malha desencontrada, uma com a interpolação QUICK consistente (Modelo 4) e uma alternativa com a chamada interpolação MSOU, segundo Tamamidis e Assanis (1993), que é considerado um esquema de interpolação isento de oscilações numéricas (Modelo 5). As implementações apresentadas aplicam-se à resolução das equações de Navier-Stokes e das equações que regem as perturbações do escoamento. As avaliações das perturbações são feitas com modelos transientes, para se ter a possibilidade de captar bifurcações entre escoamentos estacionários e transientes. Oliveira (1992) utilizou uma metodologia limitada a escoamentos estacionários e não havia a possibilidade de se captar uma bifurcação de Hopf com este modelo.

Os escoamentos de Cherdron et alii (1978) e Kelkar e Patankar (1989) serão utilizados para validação dos modelos citados. Estes escoamentos permitirão um melhor entendimento dos fenômenos relacionados à estabilidade hidrodinâmica.

O escoamento radial com alimentação radial, estudado por Langer (1991) e Oliveira (1992), é estudado utilizando-se modelos numéricos considerados mais precisos. Langer (1991) e Oliveira (1992) capturam apenas uma bifurcação, identificada na transição entre um escoamento de padrão simétrico e um outro de padrão assimétrico, mas ambos em regime estacionário. O objetivo desta nova investigação é o de tentar captar um segundo ponto de bifurcação nos escoamentos radiais. Espera-se que esta segunda bifurcação possa ser caracterizada como uma bifurcação de Hopf, que é uma transição para o escoamento de padrão transiente.

O escoamento radial com alimentação axial estudado por Pilichi (1990) é o objetivo principal do presente trabalho. Buscar-se-á através de extensiva investigação numérica a captação de uma certa distribuição experimental do número de Nusselt sobre o disco frontal ao orifício de um difusor radial. Tal distribuição experimental apresenta uma particularidade que jamais foi determinada numericamente, que é a existência de dois picos no número de Nusselt avaliado sobre a parede aquecida do difusor. Para isto conta-se com cinco modelos numéricos, que se utilizam de metodologias consideradas mais precisas que as utilizadas por Pilichi.



Maiores detalhes sobre a situação atual dos estudos sobre difusores radiais serão fornecidos no capítulo 2, onde apresentar-se-á um retrospecto sobre os últimos trabalhos relativos a este tipo de escoamento, situando o presente trabalho neste contexto.

### REVISÃO SOBRE ESCOAMENTOS RADIAIS

Escoamentos em difusores estão presentes em várias situações em engenharia. Em particular, dentre os difusores radiais, onde o fluido escoar entre discos paralelos concêntricos, pode-se citar diversos dispositivos. Nos mancais aerostáticos radiais (Gross et alii, 1980), ar sob pressão é forçado por um orifício alimentador e escoar radialmente. Em impactadores de aerossol a geometria radial tem sido amplamente utilizada para coletar partículas em suspensão no ar (Marple et alii, 1974). Outra importante aplicação do escoamento radial entre discos paralelos é a simulação de máquinas de usinagem por eletroerosão (Riffel, 1992), onde a remoção do material é feita pela ação de descargas elétricas emitidas entre a superfície da peça a ser usinada e o eletrodo. Como exemplo adicional do escoamento radial em aplicações tecnológicas pode-se citar as válvulas do tipo palheta, ditas automáticas, muito utilizadas em compressores alternativos de refrigeração, por exemplo, Prata e Ferreira (1990) e Ferreira et alii (1989). Das diversas aplicações expostas anteriormente verifica-se que o escoamento radial representa uma configuração fundamental para o projeto de diversos sistemas e equipamentos. Com a necessidade de se obter maior precisão e melhor desempenho dos componentes mecânicos, é fundamental que todos os mecanismos físicos associados a estes sejam perfeitamente entendidos e explorados.

Difusores são de um modo geral uma geometria que apresenta uma instabilidade intrínseca devida às expansões da secção transversal ao escoamento. Este fato nos alerta para um cuidado maior nos estudos destes escoamentos. Como já foi visto, não se pode assumir, a priori, um escoamento como simétrico, baseado apenas na sua geometria. Também não se pode restringir a regime permanente um escoamento que pode vir a ser transitório.

Dentre os difusores radiais tem-se os alimentados radialmente e os alimentados axialmente. Difusores com alimentação radial são simulações de difusores com alimentação axial, onde a alimentação é feita igualmente por ambos os discos do difusor, de modo que haja um equilíbrio entre as vazões superior e inferior, conforme figura 2.1. Desta forma consegue-se um escoamento paralelo entre os dois discos do difusor. Este é o meio de se obter experimentalmente tal escoamento. A simulação numérica do difusor radial com alimentação radial pode ser feita dentro do domínio computacional mostrado na figura 2.2.

A partir de valores de números de Reynolds moderados, os difusores radiais apresentam duas regiões de escoamentos com características bem diferenciadas. Na entrada do difusor, onde as velocidades são mais altas, tem-se uma região predominantemente invíscida. Nesta região ocorre um aumento da pressão ao longo do escoamento devido à redução de velocidade associada ao aumento na área de passagem do escoamento, Deschamps (1987). Este gradiente adverso de pressão pode tornar-se tão forte que, na presença do atrito com os discos, ocorre um

descolamento do escoamento das paredes do difusor, originando regiões de recirculação, Langer (1991). Para altos valores de  $r/s$ , as velocidades são menores e tem-se a predominância de efeitos viscosos, o que resulta num decaimento logarítmico da pressão.

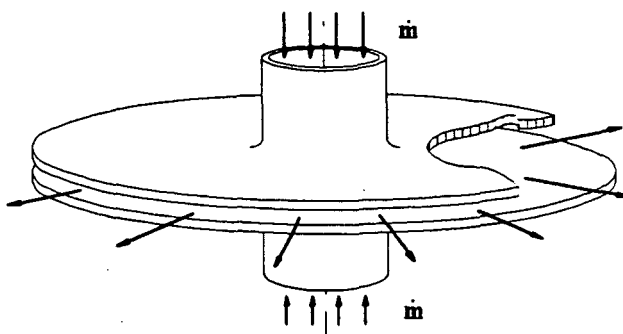


Figura 2.1 - Esquema experimental para simular um difusor radial com alimentação radial.

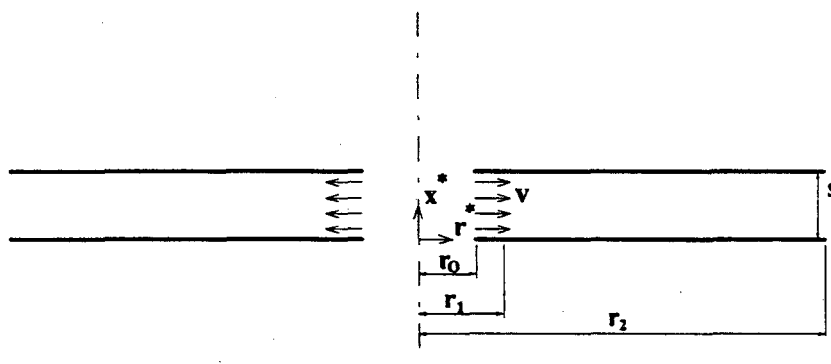


Figura 2.2 - Domínio computacional para captar-se o difusor radial com alimentação radial.

Apesar dos difusores radiais com alimentação radial serem exemplos de expansões suaves na área de passagem do escoamento, já se observaram alguns efeitos relativos à estabilidade do escoamento em tais geometrias. Estes problemas foram primeiramente estudados sob a óptica da simetria sugerida pela sua própria geometria, conforme trabalhos de Ishizawa (1965 e 1966) e Raal (1978). Ambos estudaram este escoamento sob as condições de regime estacionário e escoamento simétrico imposto em relação ao plano médio do difusor. As soluções obtidas apresentaram escoamento paralelo para número de Reynolds abaixo de um certo valor crítico e acima deste surgiram regiões de recirculação junto aos discos. Estas regiões cresciam e se deslocavam em direção à entrada do difusor à medida que o número de Reynolds do escoamento crescia.

Posteriormente, Mochizuki e Yao (1983) estudaram experimentalmente o problema térmico associado ao problema hidrodinâmico (fluido entrando a uma temperatura diferente das paredes dos discos) e perceberam que o número de Nusselt local decrescia a partir da entrada até um mínimo, tornava a crescer até um ponto de máximo para então decrescer novamente até a

saída do difusor. O ponto de máximo se movia a montante com o aumento do número de Reynolds. Este resultado despertou a curiosidade dos autores que esperavam encontrar curvas de Nusselt monotonicamente decrescentes. Então, Mochizuki e Yang (1985) se utilizaram de um esquema numérico para resolver o problema hidrodinâmico em regime não permanente utilizando uma formulação de função corrente e vorticidade. Desta feita, não foram utilizadas as hipóteses de simetria (em relação ao plano médio que separa os discos) e de regime estacionário, adotadas pelos pesquisadores que os antecederam. Com base nos resultados obtidos os autores afirmam que o fenômeno da separação é instável, ou seja, se a solução apresentar regiões de recirculação, esta é sempre de caráter não-estacionário, contrariamente ao observado por Raal. No caso de Mochizuki e Yang (1985), as regiões de recirculação se desenvolviam em uma esteira de vórtices, que caminhavam ao longo dos discos até colapsarem em uma posição à jusante no escoamento.

A esta altura é importante referenciar o trabalho de Sobey e Drazin (1986) que, apesar de estudar o escoamento em uma geometria diferente da do difusor radial, tem muito a acrescentar sobre a contradição aparentemente encontrada entre Raal, e Mochizuki e co-autores. Sobey e Drazin estudaram, numérica e experimentalmente, o escoamento entre duas placas na presença de uma expansão suave, e conseguiram, com uma geometria simétrica, obter soluções assimétricas. É mostrado no trabalho que à medida que o número de Reynolds ( $Re$ ) aumenta, o escoamento atinge pontos de bifurcação espacial ou temporal, dependendo do número Reynolds e da razão de expansão. Sobey e Drazin mostram que, para uma dada razão de expansão, o escoamento passa pelas seguintes etapas: inicialmente há apenas uma solução para a equação de Navier-Stokes, até que o número de Reynolds atinja um valor crítico, quando então a solução se bifurca em três configurações de escoamento, duas estáveis e uma instável (entenda-se como solução estável aquela que é insensível a perturbações impostas ao escoamento). Aumentando-se o número de Reynolds ainda mais, chega-se a novas bifurcações, resultando novas soluções estáveis e instáveis, até que, acima de um determinado valor, o escoamento se bifurca em configurações estacionária e não-estacionária (bifurcação de Hopf). É importante observar que a instabilidade do escoamento não implica em uma solução não-estacionária, já que para baixos números de Reynolds as soluções encontradas após um ponto de bifurcação continuam a ser estacionárias. Como demonstrado através de uma visualização experimental do escoamento de Sobey e Drazin, existe uma solução assimétrica estacionária após a primeira bifurcação. A instabilidade de uma solução é caracterizada pelo fato desta ser sensível a perturbações, ou seja, as perturbações não são amortecidas e promovem uma mudança na configuração do escoamento em direção a uma nova configuração, que seja estável.

Os difusores radiais com alimentação axial apresentam um efeito desestabilizante extra, que é a súbita mudança na direção do fluido, conforme figura 2.3.

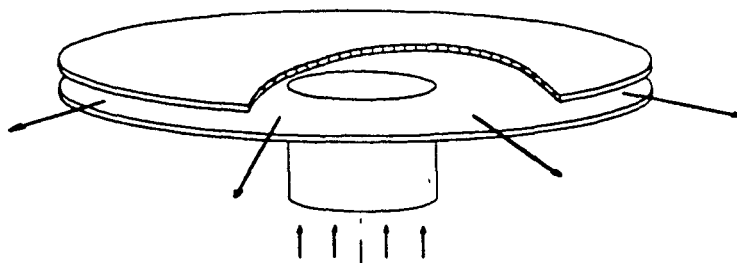


Figura 2.3 - Esquema do difusor radial com alimentação axial.

Estes difusores já foram estudados por Ferreira et alli (1989) em regime laminar para valores de Reynolds inferiores a pontos de bifurcação, e em regime turbulento por Deschamps et alli (1989). Resultados interessantes e inesperados para esta classe de escoamentos foram obtidos por Todescat (1988) para a distribuição do número de Nusselt médio no orifício alimentador e no disco do difusor que contém o orifício, em função do número de Reynolds. Todescat verificou que a distribuição do número de Nusselt médio, obtido experimentalmente, aumentava abruptamente acima de um certo valor do número de Reynolds, não concordando com os resultados numéricos, os quais subestimavam o valor encontrado experimentalmente, conforme figura 2.4.

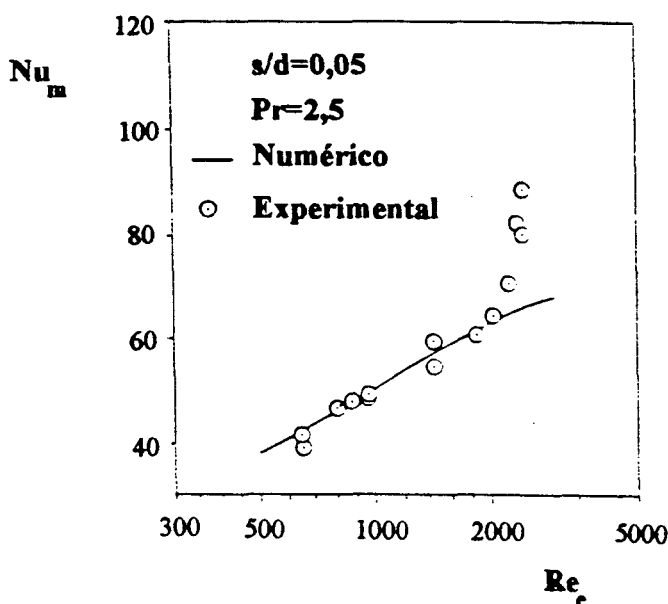


Figura 2.4 - Distribuição de número de Nusselt médio (Todescat, 1988).

Pilichi (1990) também obteve resultados inéditos para a distribuição local do Nusselt no disco frontal em função da coordenada radial. Neste trabalho, Pilichi verificou novamente que os resultados numéricos subestimavam os valores experimentais, para um número de Reynolds acima de um valor crítico. Nesta faixa de Reynolds, Pilichi obteve experimentalmente um segundo pico local no número de Nusselt, numa posição radial próxima à saída do difusor. Tal pico não foi captado numericamente pela modelação laminar estacionária adotada no trabalho, conforme figura 2.5.

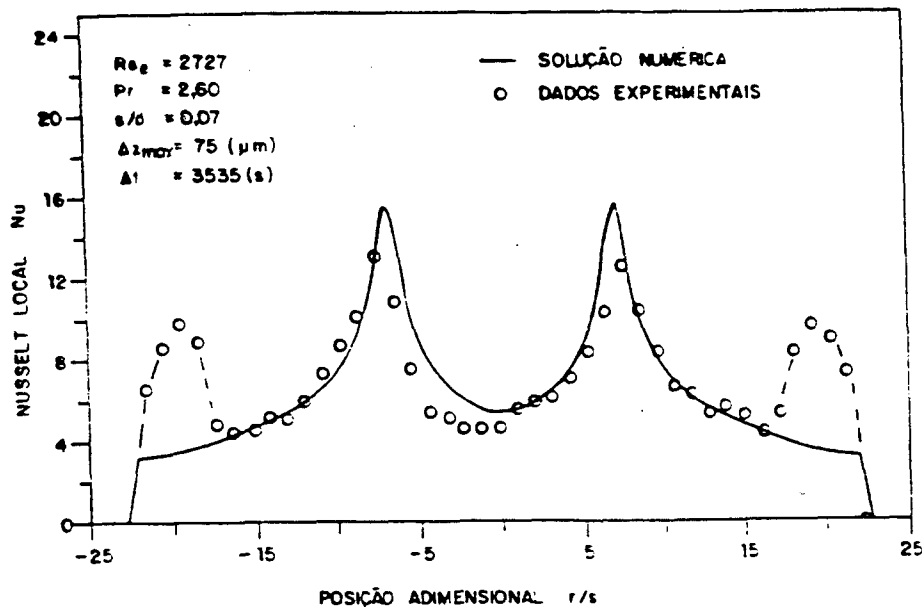


Figura 2.5 - Distribuição local de número de Nusselt (Pilichi, 1990).

Acredita-se que estas divergências entre os resultados numéricos e experimentais estejam associadas a efeitos transientes do escoamento, conforme trabalho de Prata et alli (1992). O padrão de escoamento obtido numericamente por Pilichi (1990) é apresentado na figura 2.6. Tal padrão é caracterizado por uma única bolsa de recirculação, que se abre a partir da quina e permanece aberta até a saída do difusor, o que sugere uma característica instável a esta recirculação. Tal fato ainda carece de uma explicação definitiva e é um dos agentes motivadores do presente trabalho.

Um dos primeiros estudos de bifurcações em difusor radial com alimentação radial foi desenvolvido por Langer (1991). Este obteve um escoamento paralelo para número de Reynolds até 65, onde surgiram as primeiras regiões de recirculação simétricas. Tais regiões cresceram de tamanho com o aumento do número de Reynolds, porém, para valores em torno de 115 ocorreu uma bifurcação do escoamento, ou seja, obteve-se mais de uma solução do escoamento para o mesmo número de Reynolds. Para valores superiores a 115 verificou-se que o escoamento com recirculações simétricas é instável. Nesta faixa de número de Reynolds a configuração de escoamento estável é assimétrica, conforme visualização da figura 2.7. Tais fatos constituem uma divergência com os resultados obtidos por Mochizuki e colaboradores (1983 e 1985), os quais afirmam que as recirculações são sempre de caráter oscilatório.

Langer (1991) estudou o comportamento de diversas características do escoamento radial, com o intuito de explicar as suas instabilidades. Neste sentido verificou-se que o escoamento simétrico apresenta menor consumo de energia mecânica, menor perda de carga, em relação ao escoamento assimétrico. Por outro lado a troca térmica ocorrida no escoamento assimétrico foi superior, devido à maior "agitação" do escoamento. Langer não observou bifurcação de Hopf no

seu estudo de difusores radiais. Para valores de Reynolds até 1000, jamais o escoamento deixou de ser estacionário, embora apresentasse um grau crescente de assimetria. Langer concluiu que todos estes fenômenos relativos a instabilidades e bifurcações são função do gradiente adverso de pressão, que atua contrariamente ao escoamento como se promovendo a sua flambagem. Pode-se notar que, mesmo para altos valores de Reynolds, o escoamento radial volta a ser paralelo na saída do difusor devido ao decréscimo contínuo das velocidades com o aumento da área da secção transversal. Esta região será predominantemente viscosa e amortecerá qualquer oscilação nas velocidades, desde que o canal seja suficientemente longo. Detalhes sobre estes fatos também podem ser encontrados em Langer (1990) e Langer et alli (1993b).

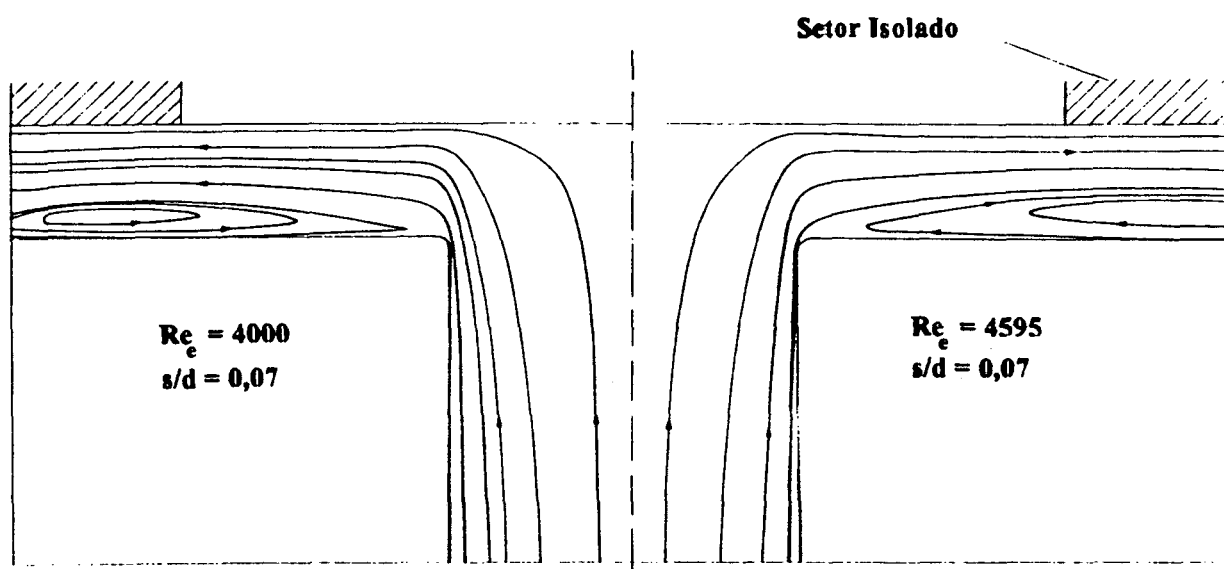


Figura 2.6 - Linhas de corrente obtidas numericamente por Pilichi (1990).

Ainda na linha de estudos da estabilidade do difusor radial com alimentação radial tem-se os trabalhos de Oliveira (1992) e (1993), o qual aplica a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica aos mesmos escoamentos simétricos obtidos por Langer (1991). Este estudo linear revela o mesmo número de Reynolds crítico observado no estudo não linear de Langer, ou seja, Oliveira aplica pequenas perturbações aos escoamentos básicos simétricos, através de uma equação linearizada e obtém a mesma conclusão de Langer, o qual necessitou de um esforço computacional sensivelmente maior. Todos os escoamentos radiais aqui citados foram explorados numericamente com a hipótese de que estes sejam bidimensionais axissimétricos. Esta é uma hipótese simplificativa forte e precisa ser melhor investigada em trabalhos futuros.

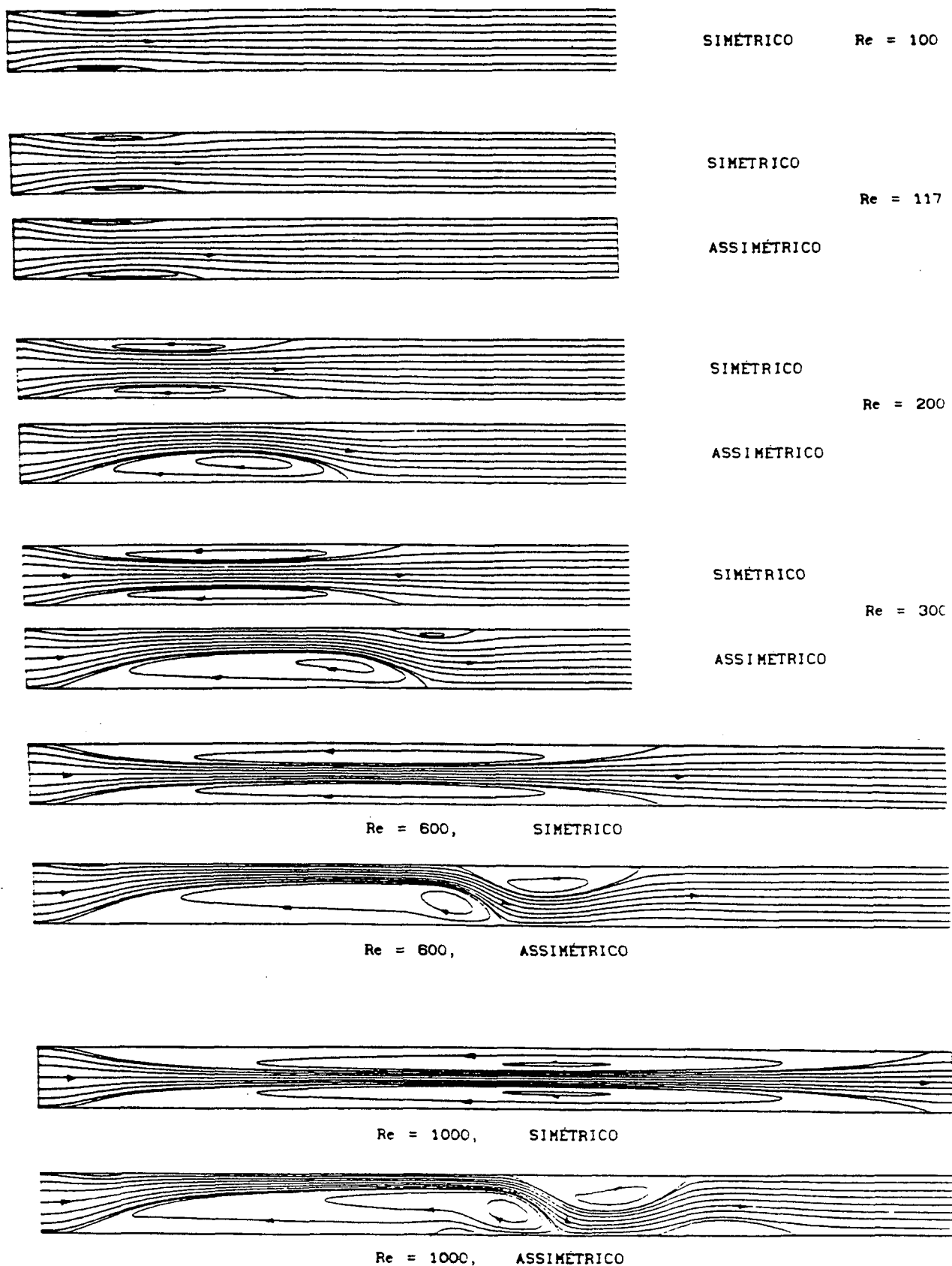


Figura 2.7 - Bifurcações entre escoamento simétrico e assimétrico observadas por Langer (1991).



O presente trabalho visa melhorar o entendimento sobre as divergências que existem entre os resultados teóricos e experimentais obtidos por Todescat (1988) e Pilichi (1990) em difusores radiais com alimentação axial. Nestes trabalhos as hipóteses sobre possíveis causas destas divergências carecem de comprovação e de uma explicação definitiva para os efeitos observados. Conforme mencionado anteriormente a expectativa é de que tais divergências estejam associadas a fenômenos transientes, relativos a instabilidades do escoamento. Desta forma, no presente trabalho busca-se um entendimento sobre a estabilidade do escoamento radial, seja com alimentação radial ou axial.

Nos capítulos subseqüentes apresentar-se-á primeiramente no capítulo 3, uma revisão sobre a "Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica" envolvida no presente trabalho. O capítulo 4 tratará de estabelecer as metodologias envolvidas na resolução numérica das equações de Navier-Stokes e das equações das perturbações, que definem a estabilidade de um escoamento. No capítulo 5 aplicar-se-ão as metodologias estabelecidas no capítulo 4 a dois escoamentos bem conhecidos em literatura pertinente: o escoamento em um duto retangular com uma súbita expansão de área e um escoamento livre incidindo sobre um prisma quadrado. Ambos são problemas bastante estudados, que servirão para validação das metodologias estabelecidas. Nos capítulos 6 e 7 estudar-se-ão os difusores radiais com alimentação radial e com alimentação axial, respectivamente. Nestes dois últimos capítulos objetiva-se explicar alguns fatos relativos a estes escoamentos, conforme panorama exposto anteriormente.

A seguir apresentam-se alguns tópicos sobre a teoria da estabilidade hidrodinâmica com enfoque para o presente trabalho.

## Capítulo 03

### TEORIA DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA

#### 3.1 - Introdução

Existe na natureza diversas situações onde o escoamento de um fluido pode mudar sua configuração, gradual ou subitamente, conforme alguma excitação externa. Matematicamente estes comportamentos distintos, ocorrendo praticamente em uma mesma condição do escoamento, caracterizam uma bifurcação da solução das equações que regem o fenômeno, originando dois ou mais padrões diferentes de escoamento.

Fisicamente existe padrões de escoamento definidos para cada condição física. Muitas vezes os padrões de escoamento são completamente distintos para condições físicas pouco diferentes. Da teoria do caos sabe-se que perturbações infinitesimais em sistemas dinâmicos podem alterar, em grandes proporções, seu comportamento (Rasband, 1990 e Thompson, 1986).

É neste contexto que se insere a teoria da bifurcação, onde estudam-se as várias possíveis soluções de uma equação que regem um certo fenômeno. Um ponto de bifurcação, onde ocorrem várias soluções simultâneas da equação em consideração, está sempre associado à instabilidade de uma certa solução. Langer (1991), por exemplo, estudando o escoamento em difusores radiais, obteve, para o mesmo número de Reynolds, uma solução simétrica instável, que dificilmente ocorreria em laboratório, devido às perturbações do ambiente, e duas soluções assimétricas estáveis, que tudo indica podem ser obtidas experimentalmente. O estudo das bifurcações é importante para se diferenciarem os vários padrões de soluções possíveis de ocorrer (configurações estáveis) e com isto determinar os pontos de transição entre cada padrão.

Em Mecânica dos Fluidos existem vários fenômenos que caracterizam bifurcações do escoamento, normalmente associados a problemas de estabilidade, assim como o obtido por Langer (1991). Estes pontos de bifurcação são geralmente definidos pelo número de Reynolds do escoamento, que incorpora os efeitos viscosos e inviscidos. Sabe-se que os efeitos viscosos tendem a estabilizar o escoamento. Portanto, um aumento no número de Reynolds diminui a estabilidade do escoamento, podendo provocar bifurcações. Algumas possíveis transições de escoamentos são apresentadas a seguir,

- |                           |   |                           |
|---------------------------|---|---------------------------|
| - Escoamento simétrico    | ⇒ | assimétrico               |
| - Escoamento estacionário | ⇒ | transiente periódico      |
| - Escoamento periódico    | ⇒ | não-periódico ou caótico. |

Estas transições caracterizam, do ponto de vista matemático, bifurcações nas soluções das equações que governam o escoamento. Seguindo esta seqüência, um escoamento laminar (ordenado) passará por padrões transientes até chegar ao regime turbulento (caótico). Exemplos de soluções transientes de equações diferenciais ordinárias oscilatórias não-periódicas são apresentadas por diversos autores, por exemplo Seydel (1988). Tais soluções já foram consideradas caóticas e hoje são estudadas da mesma forma que as equações de comportamento periódicas. Isto era em princípio chamado de comportamento "caótico", mas hoje verifica-se que é um comportamento ordenado e bem definido matematicamente. Então, comportamentos que, em princípio, parecem ser completamente aleatórios, como os escoamentos turbulentos, na realidade devem ser regidos por uma lei de formação bem definida, que deve permitir uma evolução seqüencialmente ordenada (através de transiente real). A identificação desta lei de formação seria possível se o método de solução das equações que governam o escoamento conseguisse captar todas as suas micro estruturas, inclusive no contorno.

A equação de Navier-Stokes é válida tanto para o regime laminar como para o regime turbulento. Porém, no regime turbulento, as escalas espacial e temporal das estruturas do escoamento são tão pequenas que para captá-las há necessidade de malhas tão refinadas que a presente capacidade dos computadores não consegue resolver.

Os primeiros estudos relativos a Estabilidade Hidrodinâmica e Bifurcações presentes neste trabalho iniciaram com um curso ministrado pelo Prof. Átila P. S. Freire (1991), que forneceu subsídios para o desenvolvimento destas teorias. Na literatura tem-se diversos tratados sobre a "Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica", de onde se pode destacar Drazin e Reid (1981) e Joseph (1976).

Presentemente o estudo da bifurcação em sistemas dinâmicos está bem documentado em inúmeros livros texto sobre o assunto. Um exemplo ilustrativo de uma bifurcação em uma equação diferencial ordinária, que é regida pelo "Teorema da Função Implícita" (Ioss e Joseph, 1990), é dado a seguir.

Considere a equação abaixo,

$$d\sigma/dt = F(\lambda, \sigma) \quad (3.1)$$

onde  $t$  é a variável independente,  $\sigma$  a variável dependente e  $\lambda$  um parâmetro.

Adicionalmente,  $F_{\sigma} = \partial F / \partial \sigma$ ,  $F_{\lambda} = \partial F / \partial \lambda$  e assim por diante.

### Teorema da Função Implícita:

"Seja  $(\lambda_0, \sigma_0)$  uma solução estacionária da eq. (3.1) ( $F(\lambda_0, \sigma_0) = 0$ ) e seja  $F$  continuamente diferenciável em algum espaço aberto contendo o ponto  $(\lambda_0, \sigma_0)$  do plano  $(\lambda, \sigma)$ . Então, se  $F_\sigma(\lambda_0, \sigma_0) \neq 0$ , existe um  $\alpha > 0$  e  $\delta > 0$  tal que:

(i). A equação  $F(\lambda, \sigma) = 0$  tem uma única solução  $\sigma = \sigma(\lambda)$  para  $\lambda_0 - \alpha < \lambda < \lambda_0 + \alpha$  e  $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ .

(ii). A função  $\sigma(\lambda)$  é continuamente diferenciável para  $\lambda_0 - \alpha < \lambda < \lambda_0 + \alpha$ .

(iii).  $\sigma_\lambda(\lambda) = -F_\lambda(\lambda, \sigma(\lambda)) / F_\sigma(\lambda, \sigma(\lambda))$  " (3.2)

De acordo com este teorema sempre haverá uma única solução e, portanto, uma solução estável, quando a primeira derivada da função  $F(\lambda, \sigma)$  com respeito à grandeza em estudo  $\sigma$  ( $F_\sigma(\lambda, \sigma)$ ) for não-nula. Desta maneira, a evolução da solução da equação (3.1) fica bem definida pela derivada de primeira ordem e não permite, em princípio, bifurcações.

Ioss e Joseph (1990) apresentam vários exemplos de bifurcações em um ponto de singularidade, onde a primeira derivada de  $F$  com respeito a  $\sigma$  é nula. A continuação de uma solução após um ponto de singularidade é definida através da evolução das derivadas de ordem superior, surgindo assim bifurcações para mais de uma solução. Afinal, as derivadas de ordem superior apresentam mais de uma possibilidade de evolução na integração da equação. Um exemplo deste fenômeno é descrito a seguir,

Seja  $(\lambda_0, \sigma_0)$  um ponto singular, onde  $F_\lambda = 0$  e  $F_\sigma = 0$ . Então, a evolução da função  $F(\lambda, \sigma)$  em torno deste ponto segue a seguinte equação de equilíbrio (expansão em série de Taylor):

$$2dF(\lambda, \sigma) = F_{\lambda\lambda}(\delta\lambda)^2 + 2F_{\sigma\lambda}(\delta\sigma, \delta\lambda) + F_{\sigma\sigma}(\delta\sigma)^2 + O^3 \quad (3.3)$$

onde  $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ,  $\delta\sigma = \sigma - \sigma_0$  e  $F_{\lambda\lambda} = F_{\lambda\lambda}(\lambda_0, \sigma_0)$ ,  $F_{\sigma\sigma} = F_{\sigma\sigma}(\lambda_0, \sigma_0)$  e  $O^3$  são termos de ordem superior. No limite quando  $(\lambda, \sigma) \rightarrow (\lambda_0, \sigma_0)$ , a equação (3.3) para as curvas  $F(\lambda, \sigma) = 0$  se reduz a

$$F_{\lambda\lambda}(\delta\lambda)^2 + 2F_{\sigma\lambda}(\delta\sigma, \delta\lambda) + F_{\sigma\sigma}(\delta\sigma)^2 = 0 \quad (3.4)$$

Esta forma quadrática apresenta duas tangentes à curva no ponto de singularidade  $(\lambda_0, \sigma_0)$ . Pode-se mostrar que,

$$\begin{bmatrix} \lambda_\sigma^1(\sigma_0) \\ \lambda_\sigma^2(\sigma_0) \end{bmatrix} = \frac{F_{\sigma\lambda}}{F_{\lambda\lambda}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{D}{F_{\lambda\lambda}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_\lambda^1(\lambda_0) \\ \sigma_\lambda^2(\lambda_0) \end{bmatrix} = \frac{F_{\sigma\lambda}}{F_{\sigma\sigma}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{D}{F_{\sigma\sigma}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $D = F_{\sigma\lambda}^2 - F_{\lambda\lambda}F_{\sigma\sigma}$ .

(i). Se  $D < 0$ , não existe tangente real através de  $(\lambda_0, \sigma_0)$  e este é um ponto isolado da solução da eq. (3.1). Não é possível continuar a solução com evolução das derivadas de segunda ordem.

(ii). Se  $D = 0$ , a evolução de  $\sigma$ , segundo  $\sigma_\lambda(\lambda_0)$  ou  $\lambda_\sigma(\sigma_0)$ , apresenta um caminho único. Não é uma bifurcação.

(iii). (a) Se  $D > 0$  e  $F_{\lambda\lambda} \neq 0$  (vide eq. (3.5)), existem duas tangentes  $\lambda_\sigma^1(\sigma_0)$  e  $\lambda_\sigma^2(\sigma_0)$  resultando em ponto duplo de bifurcação.

(b) Se  $F_{\lambda\lambda} = 0$  (vide eq. (3.4)), existe uma tangente nula  $\sigma_\lambda^1(\lambda_0) = 0$  e outra não  $\sigma_\lambda^2(\lambda_0) = F_{\sigma\sigma}/2F_{\sigma\lambda}$ .

Os casos (iii) a) e b) caracterizam uma evolução de dois ramos da equação a partir do ponto singular  $(\lambda_0, \sigma_0)$ . Estes são, portanto, pontos duplos de bifurcação.

Se a singularidade atinge também as derivadas de segunda ordem, é possível se fazer uma análise através das derivadas de terceira ordem. Neste caso podem surgir as bifurcações para múltiplas soluções, caracterizando os pontos triplos, ou até quádruplos de bifurcação.

O Teorema da Função Implícita pode ser estendido para equações diferenciais parciais discretizadas em um domínio computacional de cálculo, fazendo-se esta mesma análise apresentada anteriormente. Deve-se tratar adequadamente o sistema de equações algébricas gerado na discretização, substituindo-se as derivadas parciais pelas respectivas matrizes jacobianas representativas. Para uma visão computacional da teoria da bifurcação referência é feita a Kubícek e Marek (1983). Um exemplo da aplicação desta teoria no contexto da estabilidade hidrodinâmica pode ser encontrado em Kelkar e Patankar (1989).

### 3.2 - Definições

O estudo da estabilidade hidrodinâmica necessita de alguns princípios fundamentais, que são introduzidos mediante a definição de uma nomenclatura adequada. No que se segue esta nomenclatura será revista.

### 3.2.1 - Escoamento Básico

É a solução das equações de Navier-Stokes completas sujeitas à conservação da massa, condições de contorno e inicial para uma determinada condição de interesse. No presente trabalho o escoamento básico será sempre uma solução estacionária. Normalmente, trata-se este escoamento básico como uma espécie de "cobaia", onde aplicam-se certas perturbações através da teoria da estabilidade hidrodinâmica, com o intuito de avaliar sua estabilidade. Em suma, o escoamento básico é aquele que terá sua estabilidade avaliada através de perturbações sobrepostas a ele.

### 3.2.2 - Classificação de Estabilidade

Para se garantir a estabilidade de uma solução das equações de Navier-Stokes é necessária uma metodologia que possa identificar a unicidade desta solução. Para a maioria das situações esta é uma tarefa virtualmente impossível do ponto de vista analítico. Recorre-se então a uma alternativa computacional onde é realizado um acompanhamento da evolução temporal de pequenas perturbações sobrepostas ao escoamento básico. Esta superposição de perturbações introduz uma certa energia inicial no escoamento básico. A evolução desta energia fornecerá algumas informações sobre a estabilidade da solução em estudo.

Em alguns problemas particulares é possível se estudar analiticamente as perturbações aplicadas ao escoamento básico. Exemplo clássico pode ser encontrado na equação de Orr-Sommerfeld que permite a análise da estabilidade de escoamentos paralelos ou quase-paralelos. Exemplos de escoamentos quase paralelos e paralelos são os que ocorrem sobre uma placa plana e entre placas planas (Poiseuille). Informações sobre esta classe de problemas podem ser obtidas em Drazin e Reid (1981).

Joseph (1976) é um dos autores que definem a estabilidade de escoamentos através da evolução temporal de uma energia inicial média global das perturbações  $\epsilon(0)$ . Segundo esta teoria da energia é possível se representar as perturbações através deste valor médio global  $\epsilon$  definido pela integração volumétrica da energia cinética das perturbações ao longo do domínio de cálculo  $\vartheta$ ,

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2\vartheta} \int_{\vartheta} (u^2 + v^2) d\vartheta \quad (3.7)$$

A partir deste conceito de energia das perturbações define-se a estabilidade assintótica na média, que ocorre quando a energia  $\epsilon$  tende a desaparecer quando o tempo tende ao infinito. Assim, um escoamento é considerado assintoticamente estável na média se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\epsilon(t)}{\epsilon(0)} \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Fisicamente isto significa que, se introduzimos perturbações iniciais em um escoamento, este será assintoticamente estável na média se a energia global média das perturbações tender assintoticamente a zero.

Uma das vantagens do método da energia média global é a sua representatividade física de todo o domínio como função única do tempo. Desta forma conseguem-se condições globais suficientes para garantir estabilidade do escoamento. Note-se que as perturbações a que se refere aqui são de quaisquer ordem, ou seja, grandes ou pequenas. Posteriormente será visto que no caso de pequenas perturbações o problema poderá ser tratado à luz da teoria linear da estabilidade hidrodinâmica.

Ainda do ponto de vista global, Joseph (1976) apresenta duas propriedades sobre unicidade das soluções da equação de Navier-Stokes:

(i) Existe somente uma única solução da equação de Navier-Stokes para cada condição inicial definida;

(ii) Para altos valores de viscosidade do fluido (baixos valores de Reynolds), a solução da equação de Navier-Stokes tende a um escoamento simples, normalmente paralelo.

Pela primeira propriedade entende-se que a equação de Navier-Stokes, por ser linear no tempo, deve apresentar um único caminho para evolução temporal, a partir de uma condição inicial definida. Mesmo que esta evolução passe por um ponto de bifurcação, o caminho a seguir estará ainda definido pela condição inicial. Desta forma, pode surgir uma configuração completamente diferente da esperada se a condição inicial for ligeiramente alterada, basta que esta condição assuma, desde o início, um outro ramo da solução.

A segunda propriedade é fácil de ser verificada pois, para baixíssimos valores do número de Reynolds, os efeitos viscosos são predominantes e não permitem a evolução de qualquer flutuação no campo de velocidades. Nesta faixa de números de Reynolds baixos, onde qualquer perturbação imposta ao escoamento é monotonicamente amortecida para todos os pontos do domínio, tem-se o escoamento globalmente e monotonicamente estável, classificado segundo Joseph (1976) para faixa de número de Reynolds,  $Re$ , entre 0 e  $Re_{\sigma}$ , conforme figura 3.1.

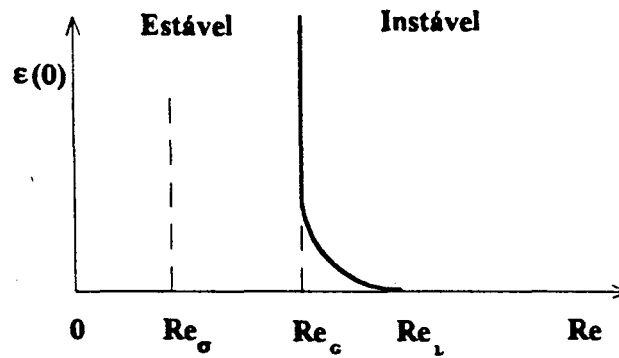


Figura 3.1 - Classificação de estabilidade segundo Joseph (1976).

Na figura 3.1 nota-se que, para números de Reynolds inferiores a  $Re_\sigma$ , qualquer que seja a energia inicial aplicada, haverá um amortecimento completo de todas as perturbações em todos os pontos do domínio. Por outro lado, para valores de Reynolds entre  $Re_\sigma$  e  $Re_g$  há também um amortecimento das perturbações para qualquer energia inicial  $\epsilon(0)$  aplicada, porém alguns pontos do domínio podem apresentar amplificação temporária de perturbação. Nesta faixa tem-se escoamentos globalmente estáveis e  $Re_g$  é definido como Reynolds limite de estabilidade global. Para  $Re > Re_g$  tem-se uma faixa de estabilidade condicional ao valor da energia inicial  $\epsilon(0)$ . Para pequenos valores de  $\epsilon(0)$  o escoamento é estável e, para  $\epsilon(0)$  maiores, o escoamento passa a ser instável. A estabilidade condicional termina para  $Re > Re_L$  (Reynolds Limite), acima do qual o escoamento apresenta-se instável a qualquer tipo de perturbação.

De acordo com a análise anterior conclui-se que se um escoamento é instável a pequenas perturbações ele será instável a qualquer outra ( $Re > Re_L$ ). Por isso não existe garantia de estabilidade para  $Re < Re_L$ , pois se o escoamento é estável a pequenas perturbações, não se pode afirmar que este seja realmente um escoamento estável a perturbações maiores. Assim, o ponto limite de garantia de estabilidade de um escoamento é o Reynolds limite de estabilidade global,  $Re_g$ , onde qualquer tipo de perturbação é amortecida. Como a teoria linear só pode ser utilizada para pequenas perturbações, esta garante apenas a "instabilidade" de uma solução a partir de  $Re_L$ , enquanto o limite da "estabilidade global",  $Re_g$ , só pode ser obtido com a teoria não-linear. Resumindo, a teoria linear fornece condições suficientes para a instabilidade, enquanto que o método da energia fornece condições suficientes para a estabilidade.

### 3.2.3 - Teoria Linear versus Teoria Não-Linear

Para estudar-se a evolução temporal de uma perturbação no campo de velocidades é necessário sobrepô-la ao escoamento básico, da seguinte forma,

$$\bar{U} = \bar{U}_b + \bar{u} \quad (3.9)$$



onde  $\bar{U}_b$  é o campo básico,  $\bar{U}$  é o campo de velocidades perturbado e  $\bar{u}$  é o campo de perturbações (idem para  $P = P_b + p$ ).

A avaliação de uma perturbação pode ser efetuada diretamente pela equação de Navier-Stokes, acompanhando-se a evolução do campo de velocidades perturbado  $\bar{U}$ . Porém, este é um procedimento lento, onde é necessário, a rigor, aguardar pela definição final do escoamento. Esta definição pode vir através do mesmo padrão de escoamento, resultando numa evolução nula para perturbação, ou pode conduzir a um outro padrão, que pode ser em regime estacionário ou em regime transiente periódico ou aperiódico. Por isso, a maneira mais precisa de se avaliar a estabilidade de um escoamento é estudar, isoladamente a evolução de perturbações no escoamento básico através da chamada equação das pequenas perturbações. Desta forma pode-se obter rapidamente a tendência do escoamento, por exemplo para estabilidade, pelo amortecimento das perturbações, ou para instabilidade, pela amplificação das perturbações. Para isto toma-se a equação de Navier-Stokes sujeita à conservação da massa e respectivas condições de contorno e inicial. Para um escoamento a densidade constante tem-se,

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} - \nu \nabla^2 \bar{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \bar{G} = 0 \quad \text{e} \quad \text{div}(\bar{U}) = 0 \quad (3.10)$$

Condições de contorno e inicial associadas a  $\bar{U}$ :

$$\bar{U}(\bar{x}, t) = \bar{U}_s(\bar{x}, t) \quad (3.11)$$

$$\bar{U}(\bar{x}, 0) = \bar{U}_o(\bar{x}) \quad (3.12)$$

Substitui-se a eq. (3.9) na eq. (3.10), tem-se uma equação para o escoamento básico e outra para as perturbações. O escoamento básico  $\bar{U}_b$  é avaliado através da própria eq. (3.10) com  $\bar{U}_b$  substituindo  $\bar{U}$ , satisfazendo os mesmos princípios de conservação e condições de contorno de  $\bar{U}$  e, portanto, podendo ser eliminado deste contexto. Assim, resulta uma equação evolutiva apenas para as perturbações  $\bar{u}$ , sujeita à restrição de conservação da massa, ou seja,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{U}_b \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{U}_b + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} - \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{e} \quad \text{div}(\bar{u}) = 0 \quad (3.13)$$

As condições de contorno e inicial associadas a  $\bar{u}$  são,

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = 0 \quad (3.14)$$

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{u}_o(\bar{x}) \quad (3.15)$$

O campo de perturbações de velocidade introduzido no escoamento gera um campo de perturbações de pressão  $p$ .

Cabe salientar que o escoamento básico  $\bar{U}_b$  deve realmente satisfazer à equação de Navier-Stokes e suas condições de contorno, caso contrário não seria uma solução do problema e não se poderia separá-lo das perturbações na eq. (3.13).

A equação das perturbações (3.13) permite avaliar quaisquer perturbações através de uma equação evolutiva própria, que também é não-linear. Este estudo das perturbações através da equação não-linear é chamado de "Teoria não-Linear".

Se agora a magnitude das perturbações for restringida a valores pequenos, é possível desprezar o termo não-linear  $\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}$  da eq. (3.13), ou seja, despreza-se o termo de ordem superior. Enquanto as perturbações permanecerem pequenas, esta equação linearizada reproduz corretamente o comportamento físico do escoamento, após a aplicação de um campo de perturbações. O estudo de estabilidade com a equação linearizada é chamado de "Teoria Linear".

Linearizando a eq. (3.13) e colocando-a na forma da equação de Navier-Stokes, tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{U}_b \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} - \bar{u} \cdot \nabla \bar{U}_b \quad (3.16)$$

Nesta forma o termo  $\bar{u} \cdot \nabla \bar{U}_b$  é equivalente a uma força de corpo, análogo a  $\bar{G}$  na eq. (3.10) e pode ser tratado como um termo fonte.

Mais adiante, no capítulo 5, apresentar-se-ão aplicações da Teoria Linear a uma expansão plana em duto retangular e a um escoamento livre sobre um prisma quadrado. A teoria linear permite apenas determinar o limite de instabilidade a pequenas perturbações, ou seja, determina-se o Reynolds Limite ( $Re_L$ ), de acordo com a figura 3.1. A partir deste ponto o escoamento é garantidamente instável a qualquer perturbação, pois se tornou instável até com perturbações infinitesimais.

### 3.2.4 - Problema espectral

Para problemas de geometria simples, como o escoamento sobre placa plana e escoamento de Poiseuille (escoamentos paralelos ou quase-paralelos), é possível aplicar-se o método da separação das variáveis para resolver-se as equações das perturbações. Esta separação é feita através da teoria dos modos normais, que decompõe as perturbações em função de cada variável do problema (vide equação de Orr-Sommerfeld, (Drazin e Reid, 1981, Orzag, 1971)). Cabe lembrar que escoamento paralelo é aquele onde a componente transversal de velocidade é zero e a componente longitudinal é função apenas da coordenada transversal.

No presente trabalho a separação espacial das perturbações não é possível, haja visto que as duas componentes de perturbações  $u$  e  $v$  têm o mesmo grau de representatividade no escoamento. Assim, resta apenas a possibilidade da separação da variável temporal, pois a derivada parcial no tempo é linear (Joseph, 1976).

Assim, consegue-se separar cada perturbação em um espectro de componentes que, superpostos através de uma série, reconstituem a componente de perturbação,

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\xi}_n(\bar{x}) \cdot e^{\beta_n t} \quad (3.17)$$

$$p(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\bar{x}) \cdot e^{\beta_n t} \quad (3.18)$$

onde os  $\beta_n$  são autovalores correspondentes a cada autovetor  $\bar{\xi}_n$  e  $p_n$  corresponde aos autovetores da perturbação da pressão.

A substituição da eq. (3.17) e (3.18), na eq. (3.16) resulta em uma equação estacionária para cada autovetor  $\bar{\xi}_n$  da solução,

$$\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{U}_b \cdot \nabla \bar{\xi}_n = -\frac{1}{\rho} \nabla p_n + \nu \nabla^2 \bar{\xi}_n - \bar{\xi}_n \cdot \nabla \bar{U}_b \quad (3.19)$$

e o autovetor  $p_n$  é calculado analogamente a pressão na equação de Navier-Stokes.

Cabe lembrar que a separação acima é válida somente para problemas estacionários. Se o problema tem características transientes, os autovetores também são função do tempo, o que vem a complicar a análise do problema de autovalor resultante.

A equação (3.18) caracteriza-se por ser um problema de autovalor, ou seja, para cada autovalor  $\beta_n$  existe uma correspondente autofunção  $\bar{\xi}_n$ . Desta forma existe um espectro de valores possíveis para  $\beta_n$  e seu correspondente conjunto de autofunções. Porém, observa-se que apenas o autovalor mais instável se sobressai ao espectro e as demais perturbações são amortecidas após um certo tempo.

O método espectral funciona bem para problemas estacionários, ou seja, onde a parcela imaginária do autovalor  $\beta$  é nula ( $\beta_i = 0$ ). Note-se que o autovalor real  $\beta_r$  define a evolução da amplitude das perturbações, enquanto  $\beta_i$  define o período de oscilação das perturbações.

Da equação (3.17) observa-se que para um decaimento das perturbações  $\beta_r$  deve ser negativo. Assim,

$$\begin{aligned} \beta_r < 0 &\Rightarrow \text{escoamento estável a pequenas perturbações;} \\ \beta_r = 0 &\Rightarrow \text{escoamento marginalmente ou neutralmente estável;} \\ \beta_r > 0 &\Rightarrow \text{escoamento instável a quaisquer perturbações.} \end{aligned}$$

Pelo método da energia é possível se quantificar o autovalor real mais instável para problemas estacionários ou não. No caso estacionário o comportamento da energia das perturbações,  $\epsilon(t)$ , é sempre monotônico e pode-se mostrar (Oliveira, 1992) que o autovalor mais instável é dado por

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \ln \left[ \frac{\epsilon(t + \Delta t)}{\epsilon(t)} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln \epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.20)$$

Shapira et alli (1990) e Oliveira (1992) usaram esta definição do autovalor real  $\beta$  e obtiveram excelentes resultados dentro da teoria linear da estabilidade hidrodinâmica. Isto porque há uma realimentação do valor de  $\beta$  mais instável para a equação (3.18) e consegue-se uma rápida convergência no algoritmo numérico. Porém, no presente trabalho onde busca-se a análise de problemas que envolvam regime transiente, a avaliação da energia  $\epsilon(t)$  parece ser apenas figurativa, haja visto que  $\epsilon(t)$  pode amplificar-se por um certo intervalo de tempo, mas amortecer na média. Exemplo deste comportamento será dado no capítulo 5.

No caso de problemas de características transientes, como é o escoamento a ser investigado no presente trabalho, é difícil equacionar um problema de autovalor equivalente, pois deveria existir, a priori, uma forma de se calcular este autovalor, que neste caso tem parcela real e imaginária. Assim, em vez de se utilizar a decomposição adotada na equação (3.17), optou-se nesta tese por calcular numericamente a evolução temporal da própria perturbação e, a partir desta evolução, avaliar o autovalor, definindo amortecimento ou amplificação, conforme proposto por Kelkar (1988) e Kelkar e Patankar (1989). Isto será detalhado nos capítulos subseqüentes.

## Capítulo 04

### METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo descrevem-se as metodologias de solução das equações que regem os problemas em estudo. As hipóteses simplificativas adotadas são: escoamento laminar, transiente, bidimensional, com propriedades constantes. As equações governantes de conservação da massa e quantidade de movimento em x e y, são descritas, de uma forma geral como,

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (4.1)$$

onde

$$J_x = \rho U\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$J_y = \rho V\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.3)$$

e S é um termo fonte genérico.

Em cada equação de conservação,  $\phi$  assume um valor correspondente,

Massa:  $\phi = 1$  ,  $\Gamma = 0$  e  $S = 0$ .

Quantidade de movimento em x:  $\phi = U$  ,  $\Gamma = \mu$  e  $S = -\frac{\partial P}{\partial x}$

Quantidade de movimento em y:  $\phi = V$  ,  $\Gamma = \mu$  e  $S = -\frac{\partial P}{\partial y}$

ou ainda, na equação da pequenas perturbações,  $\phi$  pode ser u ou v, analogamente a U ou V.

Um primeiro modelo numérico a ser utilizado neste trabalho para resolver as equações de Navier-Stokes consiste na metodologia de discretização apresentada por Patankar (1980), com formulação por volumes finitos, malha desencontrada para U, V e P, solução segregada de cada grandeza U, V e P, com acoplamentos SIMPLE e SIMPLEC entre pressão e velocidade (Van Doormal e Raithby, 1984).

Por esta metodologia obtém-se uma equação evolutiva discreta para  $\phi$  por integração da eq. (4.1) sobre cada volume de controle do domínio, conforme fig. 4.1.

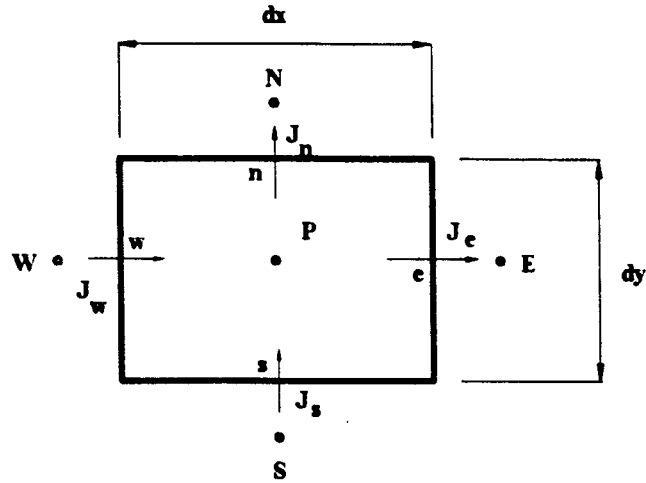


Figura 4.1 - Volume de controle interno ao domínio de cálculo.

Integrando a eq. (4.1) obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{s_1}^{s_1+\Delta s} \int_{w_1}^{w_1+\Delta w} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dx dy + \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{s_1}^{s_1+\Delta s} \int_{w_1}^{w_1+\Delta w} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy dt + \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{s_1}^{s_1+\Delta s} \int_{w_1}^{w_1+\Delta w} \frac{\partial J_y}{\partial y} dy dx dt = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{s_1}^{s_1+\Delta s} \int_{w_1}^{w_1+\Delta w} S dx dy dt \quad (4.4)$$

Sabe-se que a integração temporal, em princípio, pode ser efetuada em qualquer instante entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Assumindo-se uma variação linear de uma grandeza  $g$  com o tempo, tem-se a seguinte forma geral,

$$\int_t^{t+\Delta t} g dt = (cg^{t+\Delta t} + (1-c)g^t) \Delta t \quad (4.5)$$

Neste ponto onde é necessária a escolha do fator  $c$  que melhor represente  $g$  no intervalo de integração, usa-se a técnica de Crank-Nicolson (1953), que assume um valor médio da grandeza  $g$  no intervalo de integração temporal ( $c = 0,5$ ).

A partir desta integração temporal e assumindo-se todas as simplificações pertinentes à discretização por volumes finitos, conforme Patankar (1980), chega-se à seguinte equação discretizada para avaliação de  $\phi$ :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (4.6)$$

onde

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N - c S_P \Delta x \Delta y \quad (4.7)$$

onde

$$a_E = c\{D_e A_e + \|-F_e, 0\|\} \quad (4.8)$$

Os demais coeficientes de ligação  $a_i$  (com  $I = W, S$  ou  $N$ ) seguem lei de formação semelhante a de  $a_E$ .  $F_i$  (com  $i = w, e, s$  ou  $n$ ) corresponde ao fluxo mássico em cada face do volume de controle,  $D_i$  é o respectivo termo difusivo discretizado e  $A_i$  é um coeficiente de ajuste das variáveis na face do volume de controle em função da razão convecção/difusão aplicada ao termo difusivo, de acordo com interpolação dada pela Lei da Potência (Patankar, 1980). O superíndice  $^o$  refere-se sempre aos valores da variável no instante de tempo anterior e as barras duplas tomam o máximo valor entre os dois apresentados internamente a elas. Os outros termos da equação (4.6) são

$$b = [cS_c + (1-c)(S_c^o + S_p^o\phi_p^o)]\Delta x\Delta y + (1-c)[a_w^o\phi_w^o + a_E^o\phi_E^o + a_S^o\phi_S^o + a_N^o\phi_N^o + \\ -(a_w^o + a_E^o + a_S^o + a_N^o)\phi_p^o] + a_p^o\phi_p^o \quad (4.9)$$

onde

$$a_p^o = (\rho\Delta x\Delta y) / \Delta t \quad (4.10)$$

e

$$a_E^o = c\{D_e^o A_e^o + \|-F_e^o, 0\|\} \quad (4.11)$$

Assume-se ainda a linearização de  $S$  da seguinte forma,

$$S = S_c + S_p\phi_p \quad (4.12)$$

onde  $S_p \leq 0$ .

A resolução do sistema algébrico linearizado, resultante desta discretização, é feito pelo esquema TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm), juntamente com o algoritmo de correção em bloco (Settari e Aziz, 1973).

É de fundamental importância considerar que a equação da conservação de massa deve ser satisfeita em qualquer instante de tempo, seja no instante anterior, médio ou no novo instante de tempo. Portanto, no acoplamento Pressão-Velocidade, são as velocidades do novo instante de tempo que devem satisfazer à continuidade, pois o campo anterior já satisfaz esta condição no instante de tempo anterior.

O gradiente de pressão está embutido no termo  $S_c$ , que se apresenta parte no instante novo  $S_c$  e parte no instante anterior  $S_c^o$ . Porém, no processo de resolução segregada das equações, a pressão é tratada como um parâmetro de ajuste do campo de velocidades para que este satisfaça

a continuidade e, portanto, é indiferente discretizar-se o gradiente de pressão implicitamente ou pelo esquema de Crank-Nicolson; o campo de velocidades satisfará a conservação da massa independente da forma de discretizar a pressão. Se o termo fonte  $S$  está multiplicado por  $c = 0,5$ , o gradiente de pressão terá o dobro de variação do seu valor em relação ao no caso de  $S_c$  totalmente implícito. No entanto, o campo de pressão obtido é diferente entre os dois casos, principalmente se o campo inicial de pressão for arbitrário. Este efeito inicial de um campo de pressão arbitrário não é mais eliminado com integração em transiente real pelo esquema de Crank-Nicolson. Por exemplo, se o valor inicial do campo de pressão é zero e o gradiente necessário à conservação da massa é, por exemplo, um número positivo, então a pressão resultante será positiva e maior que o valor real. Afinal com o campo inicial nulo, tem-se o gradiente inicial também nulo, e portanto o gradiente necessário à conservação da massa quando multiplicado pelo coeficiente 0,5 deve necessariamente satisfazer à conservação da massa. Desta forma, o novo campo de pressão terá o dobro do seu valor real. Na próxima iteração o gradiente de pressão continuará distorcido para compensar o excesso ocorrido na integração anterior.

No processo iterativo de integração numérica avança-se no tempo  $t$ , em intervalos  $\Delta t$ . Este avanço temporal é feito dentro de um laço iterativo interno, onde todo o campo de velocidades deve satisfazer às equações de conservação naquele instante de tempo; isto é necessário devido às não-linearidades das equações. Neste laço interno mantém-se fixo o campo anterior de velocidades e atualiza-se iterativamente o campo do novo instante de tempo, até que este atinja um resíduo tolerável na equação de conservação da massa. Apresentam-se dois controles numéricos neste laço interno, um é o resíduo da equação de conservação da massa e o outro é um limite do número de iterações internas. Estes dois controles são parâmetros importantes no processo de convergência temporal.

A metodologia descrita anteriormente é a mais tradicional (Patankar, 1980) e foi empregada por Gashe (1992), Oliveira (1992), Langer (1991), Pilichi (1990), Todescat (1988) e Deschamps (1987), no estudo do escoamento em difusores radiais, diferindo do presente trabalho apenas pelo esquema transiente de Crank-Nicolson. Esta metodologia descrita acima será referenciada daqui por diante como Modelo 0, por se tratar da metodologia básica proposta por Patankar (1980).

No decorrer deste trabalho houve a necessidade de melhorar as metodologias de discretização das equações de Navier-Stokes e, por isso, implementaram-se algumas variações em cima da metodologia básica proposta por Patankar.

Um segundo modelo implementado para discretização das equações de Navier-Stokes foi o esquema de malha com variáveis colocadas no mesmo ponto nodal. A metodologia de discretização das equações de Navier-Stokes é baseada no esquema colocalizado de Majumdar (1988), conforme proposto por Langer et al. (1993a) (vide Apêndice D). Tal esquema prevê a possibilidade de resolução das equações de Navier-Stokes em um domínio de cálculo em forma de L, permitindo a simulação de um escoamento com mudança de direção, sem precisar incluir a região sólida no domínio de solução ou mesmo utilizar a técnica de multiblocos (Deschamps,



1987). Originalmente o domínio de cálculo abrangido pelo programa proposto por Patankar (1980) é o de um retângulo, onde se pode obter uma região sólida interna tornando infinita a viscosidade desta região. A desvantagem deste método é que se necessita resolver as equações sobre a região sólida, cujo campo de velocidades é obviamente conhecido e igual a zero. Langer et alli (1993a) eliminaram a região sólida do domínio de cálculo, dando maior eficiência ao método. Este esquema com domínio em forma de L será utilizado na avaliação do escoamento no difusor radial com alimentação axial. Esta alternativa é conseguida graças a uma varredura diferenciada em cada linha do TDMA. Opcionalmente, Langer et alli (1993a) apresentaram uma correção no termo transiente de forma a obter soluções independentes do incremento de tempo utilizado, assim como o esquema de Majumdar, que permite obter soluções independentes do fator de relaxação empregado. Maiores detalhes sobre esta formulação colocada podem ser encontrados no Apêndice D. Tal esquema proposto com interpolação via Lei da Potência é denominado de Modelo 1.

A validade da aplicação de uma função de interpolação tipo Lei da Potência a escoamentos puramente radiais pode ser questionada. Na verdade esta função de interpolação apresenta uma inconsistência para altos valores do número de Reynolds, onde o valor da componente radial interpolado na face do V.C. tenda ao valor a montante da mesma (tende ao esquema Upwind). Desta forma a velocidade interpolada não está considerando que no escoamento radial ocorre uma queda da velocidade radial devida à expansão na área de passagem do fluido. Assim, tem-se um erro no esquema numérico com esta interpolação, que é proveniente de uma aproximação unidimensional e não leva em conta variações de área. Baseado nestes fatos procurou-se estabelecer novas formas de interpolação visando a inclusão da variação da área na função de interpolação. Para isto adotou-se uma interpolação quadrática, onde se usam dois pontos nodais à montante e um ponto à jusante da face. Esta interpolação é denominada de QUICK consistente, conforme trabalho de Hayase et alli (1992), onde é apresentado o esquema para malha uniformemente distribuída.

O esquema adotado por Hayase consiste na implementação de uma função de interpolação quadrática a uma malha uniformemente distribuída, que satisfaz os princípios básicos do método dos volumes finitos. No Apêndice B apresenta-se uma extensão deste esquema QUICK proposto por Hayase et alli (1992) para malhas não-uniformes. Este esquema, baseado no Modelo 1, com a implementação da interpolação QUICK é denominado aqui de Modelo 2.

Uma quarta metodologia empregada neste trabalho é a resolução das equações de Navier-Stokes reescritas para a variável  $U$  e o produto do raio local pela componente radial de velocidade,  $rV$ . Tal metodologia se aplica apenas aos escoamentos radiais e contempla uma das vantagens da formulação em função corrente e vorticidade, onde  $\psi$  é independente da variação da área de passagem do fluido. Este efeito ocorre somente em escoamentos avaliados em coordenadas cilíndricas e cuja direção principal é a radial. Nesta formulação consegue-se minimizar o efeito de expansão da área de passagem do fluido sobre a variável a ser resolvida, que é  $rV$ . A variável primitiva  $V$  é inversamente proporcional à posição radial no difusor, assim  $rV$

depende pouco de  $r$ . A interpolação de  $rV$  é mais suave que a interpolação de  $V$ , afinal  $V$  é acoplada à posição radial  $r$ . A metodologia numérica baseada nas variáveis modificadas  $U$  e  $rV$ , discretizadas em esquema colocalizado e com interpolação via QUICK consistente é uma variação do Modelo 2 apresentado anteriormente, e será definido como Modelo 3.

As equações da conservação da massa, quantidade de movimento na direção  $x$  e quantidade de movimento na direção radial  $r$  em termos de  $U$  e  $V_r$  ( $V_r = rV$ ), obtidas a partir das equações de Navier-Stokes, são

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_r)}{\partial r} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rUU)}{\partial x} + \frac{\partial (V_r U)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial (V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (4.15)$$

As adimensionalizações a serem utilizadas no difusor radial com alimentação radial (capítulo 6) são apresentadas a seguir,

$$U = U^*/\bar{V} \quad , \quad V_r = V_r^*/r_1 \bar{V} \quad , \quad P = P^*/\rho \bar{V}^2$$

$$x = x^*/r_1 \quad , \quad r = r^*/r_1 \quad , \quad \tau = \bar{V} t_1/r_1 \quad (4.16)$$

$$\text{e } \text{Re} = \rho \bar{V} r_1 / \mu$$

onde  $\bar{V}$  é a velocidade radial média na posição radial  $r_1$  (vide figura 6.1) e  $*$  indica as variáveis dimensionais.

No capítulo 7, adimensionalizam-se as componentes de velocidade em termos da velocidade  $U_e$  na entrada do orifício.

Maiores detalhes sobre a discretização em malha colocalizada, que é a base dos modelos 1, 2 e 3, podem ser encontrados no Apêndice D.

No Apêndice A apresentam-se os casos limites do escoamento puramente radial, o caso puramente viscoso e o caso puramente invíscido. No caso do escoamento invíscido, pode-se comprovar a eficiência da nova interpolação na distribuição de pressão obtida com o QUICK consistente. Com a interpolação lei da potência (Modelo 1), superestima-se o valor da velocidade na face dos V.C. para altos valores de Reynolds e, com isto, subestima-se o valor da pressão. Isto ocorre porque a interpolação tende ao esquema Upwind, para altos Reynolds, e toma-se o valor

da velocidade à montante, que é maior que o valor real devido à expansão existente no difusor. Portanto, a correção de pressão necessária à conservação da massa será inferior à real. Com a interpolação QUICK toma-se um valor na face mais coerente com a realidade física e, portanto, a pressão também é mais próxima da distribuição exata, calculada analiticamente.

No decorrer do trabalho surgiram padrões transientes aperiódicos de escoamentos, tanto no difusor radial com alimentação radial, quanto no difusor com alimentação axial, obtidos com modelos colocalizados e interpolação QUICK consistente. Tal situação criou um impasse, pois não se sabia se a transitoriedade do escoamento era devida a alguma instabilidade numérica, ou se era realmente devida a alguma instabilidade física. Em virtude desta incerteza associada aos escoamentos aparentemente transientes, propõem-se algumas alternativas no sentido de validar as metodologias numéricas para estes tipos de escoamentos.

A primeira dúvida é quanto à validade do esquema colocalizado para escoamentos transientes e, neste sentido, utilizou-se a metodologia básica proposta por Patankar (1980) em malha desencontrada, para a resolução de um domínio em forma de L conforme implementação executada por Langer et alii (1993a). Em cima desta metodologia acrescentou-se a interpolação QUICK consistente proposta por Hayase et alii (1992). Esta implementação contempla a discretização em malha desencontrada, que tem sido largamente utilizada em escoamentos transientes, associada com uma interpolação QUICK, que é numericamente mais precisa (terceira ordem\*). Este modelo foi denominado de Modelo 4 e será testado em uma situação comprovadamente transiente no capítulo 5, onde estudar-se-á o escoamento sobre prisma quadrado.

De posse de um modelo que funcione bem em escoamentos transientes, necessita-se ainda de uma verificação da transitoriedade dos escoamentos radiais. Segundo Tamamidis e Assanis (1993) as interpolações QUICK podem gerar instabilidades numéricas devidas à interpolação quadrática utilizada. No esquema QUICK o valor interpolado em cada face pode exceder ao valor dos seus dois vizinhos imediatos, e neste caso tem-se uma espécie de inconsistência numérica. Para evitar isso dever-se-ia ter uma malha mais refinada de modo a se obter um valor interpolado em uma região de comportamento monotônico, ou seja, em uma região sem inversão no sentido de crescimento da variável  $\phi$  interpolada. Naturalmente este problema surge somente em escoamentos com altos gradientes, na variável  $\phi$  em questão, e são chamados escoamentos com gradientes descontínuos.

Tamamidis e Assanis (1993) discutem estes problemas mostrando que a utilização de esquemas de baixa ordem, como o esquema Upwind (de primeira ordem), geram soluções numéricas estáveis e imprecisas, com grande efeito de difusão numérica. Por outro lado, interpo-

\* A definição de ordem adotada nos Apêndices B e C é a mesma de Tamamidis e Assanis (1993) e corresponde ao maior termo desprezado na série aproximadora.

ladores de mais alta ordem como QUICK, que é de terceira ordem, podem gerar oscilações não físicas em regiões onde existem altos gradientes na variável  $\phi$  em questão. Segundo Tamamidis e Assanis (1993) o ideal é o uso de um interpolador de alta ordem, mas onde não se permita a existência de oscilações não físicas, o que se consegue através da imposição de um limitador de fluxo ao valor interpolado nas faces. Neste caso escolheu-se uma variação da interpolação TVD ("Total Variation Diminishing") com limitador de fluxo, chamada de MSOU ("Monotonic Second Order Upwind"). Tal interpolador é considerado essencialmente não oscilatório, denominado de ENO ("Essentially Non-Oscillatory"). Detalhes sobre a extensão deste esquema para malhas não uniformes podem ser encontrados no Apêndice C. A implementação do esquema MSOU foi feita sobre a discretização em malha desencontrada análoga ao modelo 4 e foi denominada de Modelo 5. Maiores detalhes sobre estes esquemas de interpolação de  $\phi$  nas faces dos V.C. podem ser encontrados em Marchi (1993).

Dentre tantas referências a métodos numéricos relativos a Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, referencia-se o curso do Prof. Clovis R. Maliska (1990), que foi o ponto de partida para a investigação numérica envolvida no presente trabalho.

Resumindo, tem-se os seguintes modelos implementados para o desenvolvimento do presente trabalho:

**Modelo 0** - malha desencontrada e interpolação via Lei da Potência;

**Modelo 1** - malha colocalizada e interpolação via Lei da Potência;

**Modelo 2** - malha colocalizada e interpolação via QUICK consistente;

**Modelo 3** - malha colocalizada e interpolação via QUICK consistente com resolução das variáveis  $U$  e  $rV$ ;

**Modelo 4** - malha desencontrada e interpolação via QUICK consistente;

**Modelo 5** - malha desencontrada e interpolação via MSOU.

A seguir apresentam-se alguns exemplos de validação da teoria de estabilidade hidrodinâmica e bifurcação, fazendo-se uso das metodologias apresentadas neste capítulo.

## Capítulo 05

### VALIDAÇÃO DA METODOLOGIA DE CÁLCULO

#### 5.1 - Introdução

As metodologias numéricas introduzidas anteriormente para estudar a estabilidade hidrodinâmica serão exploradas no presente capítulo.

Estas metodologias precisam ser validadas e serão agora aplicadas a problemas físicos conhecidos.

#### 5.2 - Bifurcação em Expansão Plana

Na validação das metodologias de solução das equações é importante tomar a gama mais ampla possível de problemas conhecidos. Neste item, escolheu-se a expansão plana súbita estudada experimentalmente por Cherdron, Durst e Whitelaw (1978). Após a expansão, o escoamento apresenta ejeções periódicas de vórtices para altos valores de Reynolds. Curvas de bifurcação entre escoamentos simétrico e assimétrico também estão presentes neste caso e serão exploradas.

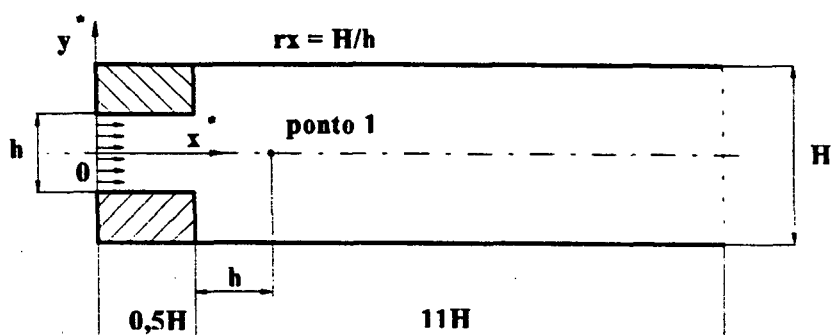


Figura 5.1 - Domínio computacional da expansão plana de Cherdron e colaboradores (1978).

As equações governantes são a conservação da massa e quantidade de movimento linear em  $x$  e  $y$  para fluido newtoniano com propriedades constantes,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (5.3)$$

Nas equações anteriores as seguintes adimensionalizações foram adotadas:

$$U = U^* / U_{\max}, \quad V = V^* / U_{\max}, \quad P = P^* / \rho U_{\max}^2$$

$$x = x^* / h, \quad y = y^* / h, \quad \tau = t U_{\max} / h. \quad (5.4)$$

$$Re = U_{\max} h / \nu$$

onde  $U_{\max}$  é a máxima velocidade na entrada do canal (perfil parabólico),  $h$  é a altura da entrada do canal,  $Re$  é o número de Reynolds e  $*$  indica as variáveis dimensionais.

As condições de contorno associadas às equações anteriores são,

$$x = 0 \quad U = 1 - 4y^2 \quad \text{para } -0,5 < y < 0,5 \quad (5.5)$$

$$x = 11,5 \, rx \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (5.6)$$

onde  $rx$  é a razão de expansão do canal ( $rx = H/h$ ).

$$\text{Nas regiões sólidas, } U=V=0. \quad (5.7)$$

Neste capítulo empregar-se-á uma discretização numérica tradicional em malha desconstruída com interpolação pela Lei da Potência e esquema de discretização temporal por Crank-Nicolson, referenciado como Modelo 0, segundo Patankar (1980) (vide capítulo 4). O objetivo preliminar deste capítulo é validar a discretização das equações das pequenas perturbações e para isto pode-se usar uma discretização numérica consagrada.

É importante salientar que o número de Reynolds, definido por Cherdron et alli (1978),  $Re'$ , é baseado na máxima velocidade na secção de expansão,  $U'_{\max}$  ( $x^* = 0,5H$ ), e na altura  $h$  de entrada do canal. O número de Reynolds do presente trabalho,  $Re$ , é baseado na máxima

velocidade prescrita na entrada do canal  $U_{\max}$  ( $x^* = 0$ ). A condição de contorno de velocidade na entrada do domínio computacional é a de um perfil parabólico plenamente desenvolvido com velocidade máxima  $U_{\max}$ . Esperava-se que a velocidade  $U'_{\max}$  fosse virtualmente a mesma que a definida na entrada  $U_{\max}$ , no entanto, um efeito elíptico do escoamento sobre a secção de expansão alterará a velocidade máxima  $U'_{\max}$  esperada, em até 5%. Em vista desta diferença entre as duas velocidades citadas é necessária uma correção sobre  $Re'$  definido na secção de expansão para obter-se o  $Re$  definido na entrada para então promover-se uma comparação entre os resultados experimentais de Cherdron et alli (1978) e os do presente trabalho.

Como  $Re'$  varia com  $U'_{\max}$ , que é função do escoamento, define-se uma correlação entre os Reynolds  $Re'$  e  $Re$ ,

$$Re = Re' \cdot U_{\max} / U'_{\max} \quad (5.8)$$

Caso se queira uma melhor comparação dos resultados do presente trabalho com os resultados de Cherdron et alli (1978) utiliza-se a eq.(5.8). Assim, fixa-se  $Re'$  desejado, de acordo com Cherdron et alli (1978), e avalia-se o  $Re$  do presente trabalho a cada iteração, conforme o valor de  $U'_{\max}$  calculado, ou vice-versa.

Com a formulação numérica e a metodologia proposta por Patankar (1980), (Modelo 0), conforme descrição efetuada no capítulo 4, obtiveram-se inicialmente soluções simétricas estacionárias.

Para o canal com razão de expansão  $rx=2$  usou-se uma malha de 120 pontos na direção  $x$  e 42 pontos na direção  $y$ , sendo que a região sólida foi tratada como um fluido de viscosidade infinita, por simplicidade de metodologia (Patankar, 1978). Para a expansão de razão  $rx=3$  usou-se uma malha de  $120 \times 50$  pontos, também tratando-se o sólido como fluido de viscosidade infinita.

Nas figuras 5.2 a) e b) são apresentadas algumas soluções simétricas deste escoamento.

Tomando-se as soluções simétricas como escoamentos básicos e aplicando-se uma grande perturbação, do tipo deslizamento em uma parede, cria-se uma condição inicial perturbada. No caso da expansão plana impõem-se a condição de parede deslizante (tensão de cisalhamento nula), na parede inferior do canal, por um intervalo de tempo de  $\Delta\tau = 1,0$ . Após este tempo retorna-se a condição de contorno original de parede não deslizante ( $U(y = -1) = 0$ ), desta forma foi introduzida uma grande perturbação no campo inicial de velocidades, equivalente a uma súbita frenagem do escoamento junto a parede inferior. A partir desta nova condição inicial, avalia-se o escoamento em regime de transiente real com incremento de tempo  $\Delta\tau = 0,1$ . No início do processo iterativo nota-se um período de estabilização numérica, onde os resíduos da equação da conservação da massa não atingem os valores de tolerância impostos, mas depois de algumas iterações verifica-se uma estabilização nas oscilações do campo de velocidades, que tende a um padrão estacionário. Este padrão poderá ser novamente simétrico, se o escoamento inicialmente simétrico for estável, ou poderá ser assimétrico, se o escoamento inicial for instável. A seguir apresentam-se alguns casos onde o escoamento tornou-se assimétrico, figuras 5.3 a) e b).

Através deste estudo determina-se um ponto de bifurcação para expansão plana de razão  $rx=2$  em torno de  $Re=200$ . Para razão de expansão  $rx=3$  obtém-se a bifurcação entre solução simétrica/assimétrica em torno de  $Re=90$ .

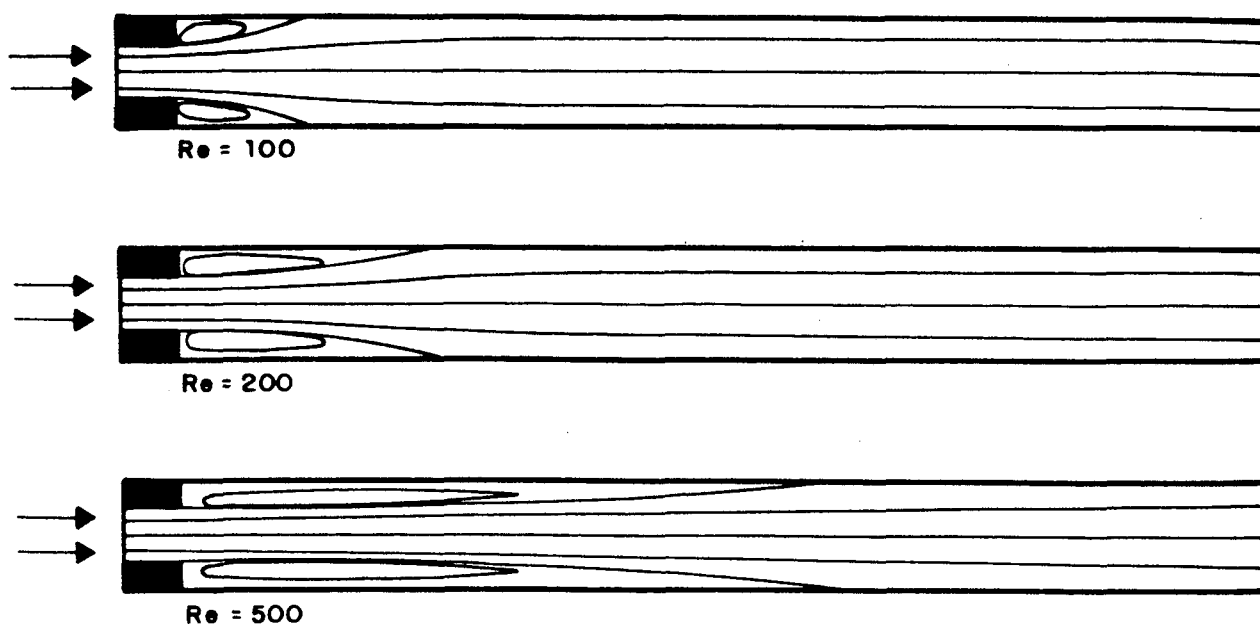


Figura 5.2 a) - Soluções simétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com  $rx=2$ .

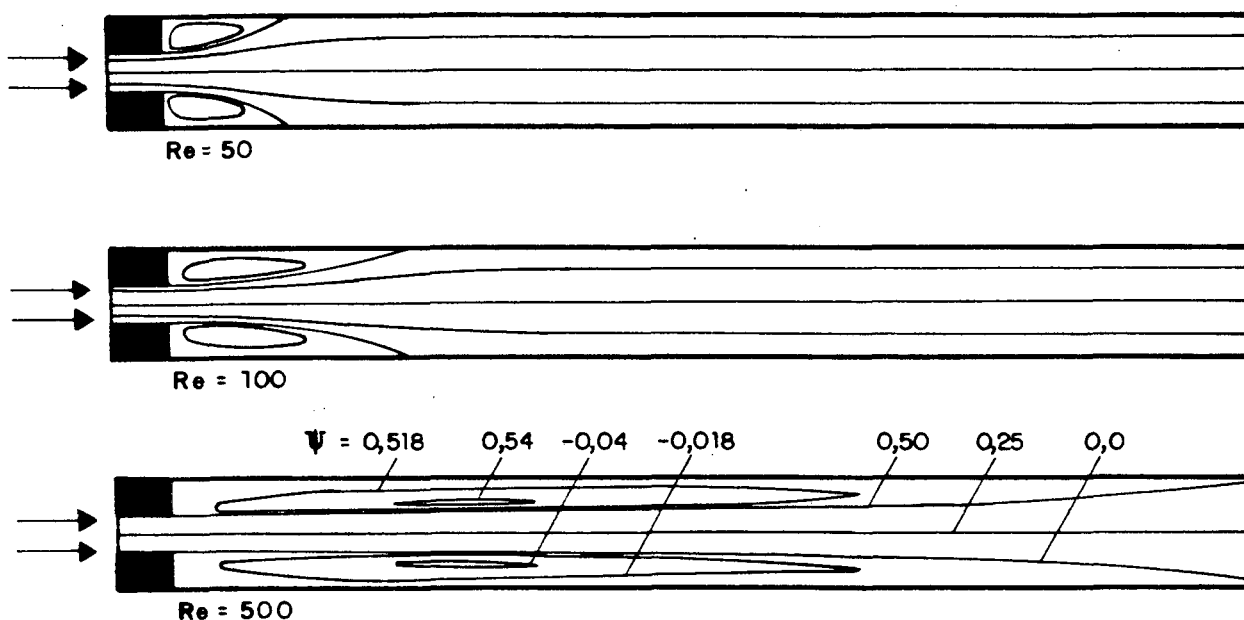


Figura 5.2 b) - Soluções simétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com  $rx=3$ .

Além de se aplicar grandes perturbações aos escoamentos básicos simétricos, que são avaliadas através do campo de velocidades perturbado (via equação de Navier-Stokes), foram



aplicadas também pequenas perturbações, que são avaliadas isoladamente do campo de velocidades pela Teoria Linear (vide cap. 3). Como condição inicial para o campo de perturbações de velocidade aplicou-se à componente de perturbação transversal  $v$ , na região inferior à linha de simetria do canal, o valor  $v(y)=10^{-6}$  (para  $-1 < y < 0$ ). A partir desta condição inicial obteve-se a evolução temporal do campo de perturbações. Inicialmente houve um período onde o campo de perturbações se ajustou ao escoamento, este estágio compreendeu um intervalo de tempo  $\Delta\tau = 1,0$ . Durante este ajuste inicial os critérios de convergência não foram satisfeitos, mas em seguida o campo de perturbações satisfaz a conservação da massa. Pode-se considerar este novo campo de perturbações, que satisfaz a equação da continuidade, como condição inicial do escoamento e reiniciar a evolução temporal a partir deste ponto. Na verdade isto é irrelevante, pois o procedimento aplicado durante o intervalo  $\Delta\tau = 1,0$  e após ele é idêntico, ambos os estágios estão sujeitos aos mesmos critérios.

Nas figuras 5.4 e 5.5 observou-se uma evolução monotônica tanto das perturbações, quanto da energia cinética média global e destas, para valores moderados de  $Re$ . A evolução das pequenas perturbações é regida pela eq. (3.16), de acordo com a teoria linear. Aplica-se a equação das pequenas perturbações (eq. (3.16)), segundo as adimensionalizações introduzidas nas eqs.(5.4).

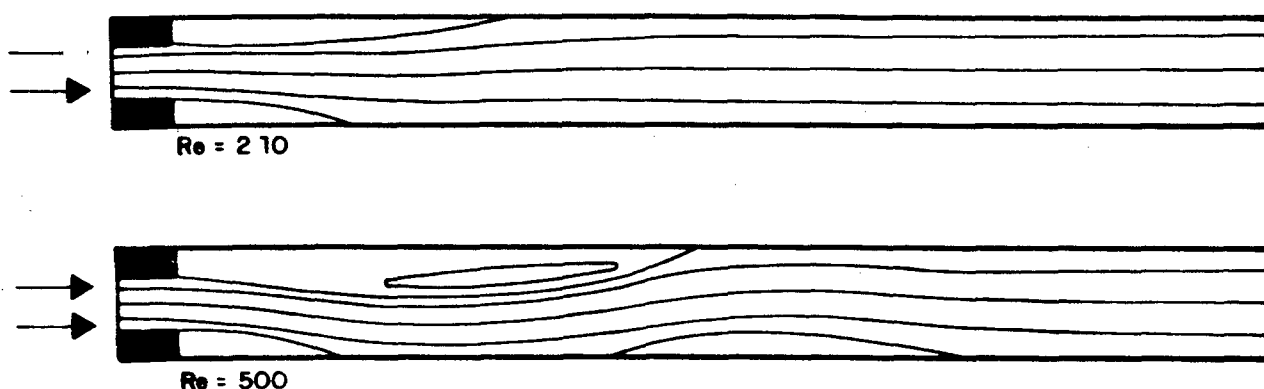


Figura 5.3 a) - Soluções assimétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com  $rx=2$ .

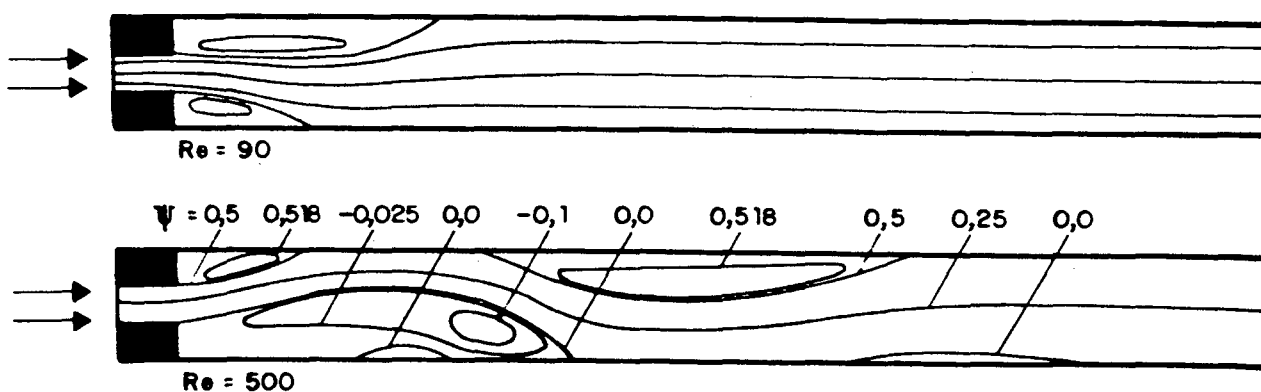


Figura 5.3 b) - Soluções assimétricas para o canal de Cherdron et alli (1978), com  $rx=3$ .

Quando a evolução temporal da energia  $\epsilon$  é monotônica, pode-se, analogamente aos trabalhos de Shapira et alli (1990) e Oliveira (1992), calcular o autovalor mais instável  $\beta$ , baseado nesta média global, conforme eq. (3.20). Convém lembrar que  $\beta$  só pode ser avaliado desta forma em problemas que envolvam bifurcações estacionárias, onde ocorre um comportamento monotônico das perturbações.

Apresentam-se a seguir exemplos da evolução da energia média global  $\epsilon$  citada anteriormente, juntamente com o autovalor  $\beta$  calculado pela eq. (3.20) e algumas perturbações de velocidades avaliadas no "ponto 1" da figura 5.1. Tais evoluções são avaliadas sobre os escoamentos básicos simétricos para os números de Reynolds de 100 e 500 com  $rx=2$ , e são apresentadas respectivamente nas figuras 5.4 e 5.5.

Nota-se que os casos onde o escoamento volta a ser simétrico, ocorre amortecimento das perturbações e, nos casos em que o escoamento evolui para configurações assimétricas, tem-se uma amplificação das perturbações, ou seja, tem-se valores de  $\beta$  negativos e positivos, respectivamente, para o amortecimento e amplificação das perturbações.

Observa-se, na figura 5.5 b), que  $\beta$  pode inicialmente representar uma tendência qualitativamente errada (alternância entre amortecimento e amplificação), mas após um determinado tempo,  $\beta$  converge para o valor correto, neste caso, para a amplificação das perturbações. Tal comportamento é explicado pela teoria espectral como uma indefinição intermediária, onde vários autovalores atuam nas perturbações. A definição pelo autovalor mais instável, associado ao amortecimento dos demais, ocorre após um certo intervalo de tempo. Nesta fase inicial não se tem um comportamento monotônico, mas a partir de  $\tau = 100$  pode-se identificar apenas crescimento das perturbações, com  $\beta$  positivo. Observa-se que os crescimentos monotônicos das perturbações caracterizam bifurcações entre escoamentos estacionários. Mais adiante estudar-se-á um escoamento sobre um prisma quadrado onde as bifurcações existentes ocorrem entre um padrão estacionário e um padrão transiente e neste caso as perturbações apresentam comportamento oscilatório.

Na figura 5.5 avaliou-se o comportamento do escoamento simétrico a  $Re=500$  com  $rx=2$ , sujeito à discretização por Crank-Nicolson (1953). Posteriormente este estudo foi refeito com discretização temporal totalmente implícita, onde observou-se um comportamento completamente análogo ao obtido pelo esquema de Crank-Nicolson. A diferença gerada no autovalor  $\beta$  devida a discretização temporal foi inferior a 2%, o que em princípio não justifica a utilização do esquema de Crank-Nicolson, que exige mais memória e tempo de CPU em relação ao esquema totalmente implícito.

Na figura 5.6, apresenta-se a evolução do autovalor mais instável  $\beta$  para os escoamentos básicos simétricos e assimétricos. Nesta, observa-se a existência dos dois pontos de bifurcação, um obtido sobre o escoamento básico simétrico e outro sobre o escoamento assimétrico.

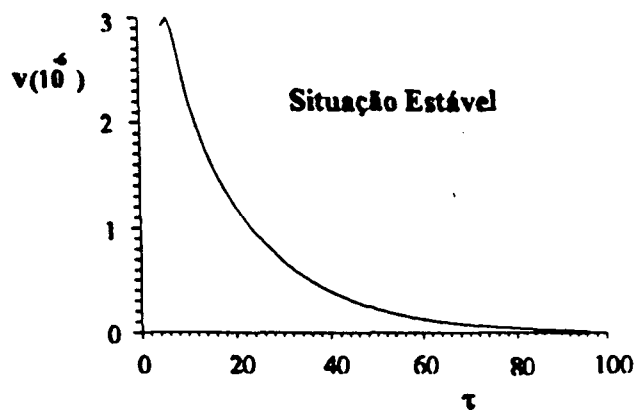


Figura 5.4 a) - Evolução de uma perturbação  $v$  aplicada ao escoamento simétrico para  $Re=100$  e  $rx=2$ .

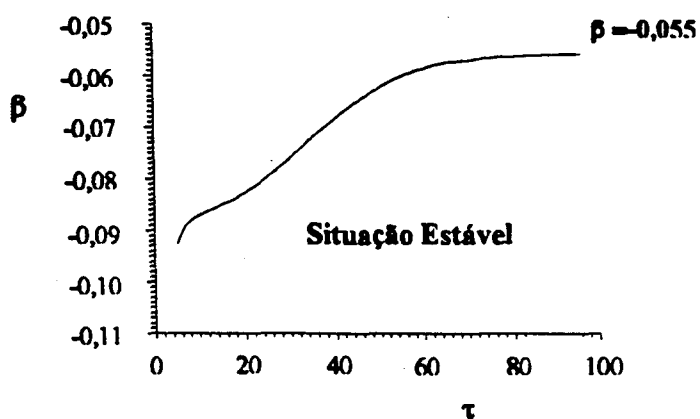


Figura 5.4 b) - Evolução temporal do autovalor menos estável  $\beta$  para  $Re=100$  e  $rx=2$ .

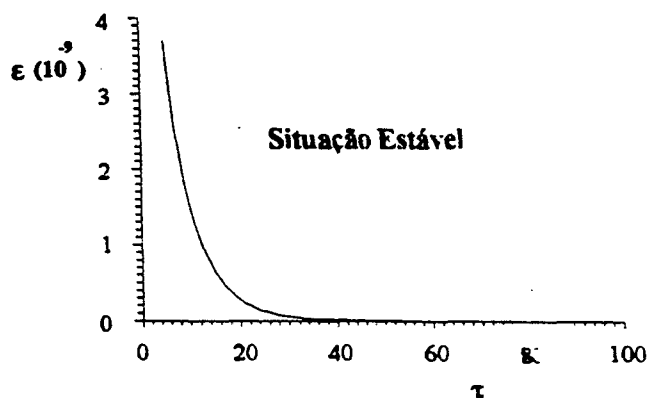


Figura 5.4 c) - Evolução temporal da energia média global das perturbações  $\epsilon$  para  $Re=100$  e  $rx=2$ .

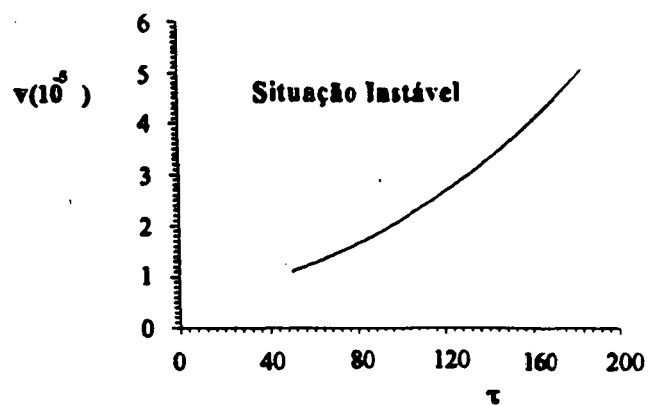


Figura 5.5 a) - Evolução de uma perturbação  $v$  aplicada ao escoamento simétrico para  $Re=500$  e  $rx=2$ .

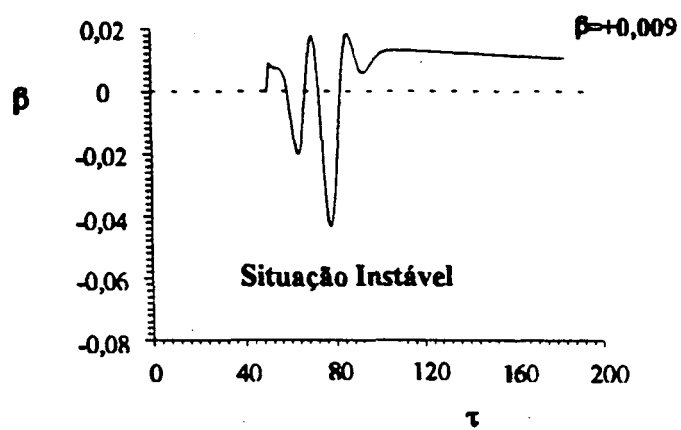


Figura 5.5 b) - Evolução temporal do autovalor mais instável  $\beta$  para  $Re=500$  e  $rx=2$

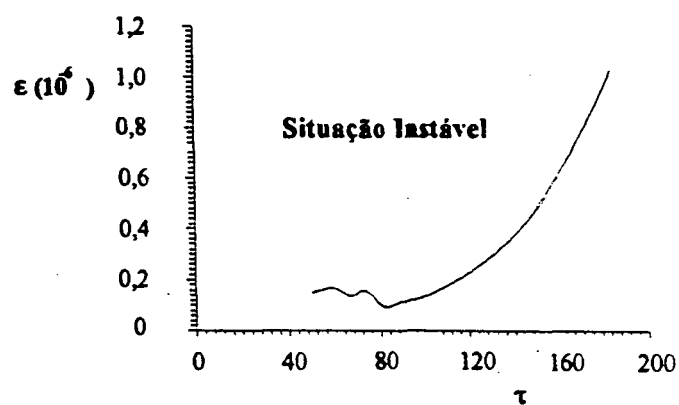


Figura 5.5 c) - Evolução temporal da energia média global das perturbações  $\epsilon$  para  $Re=500$  e  $rx=2$

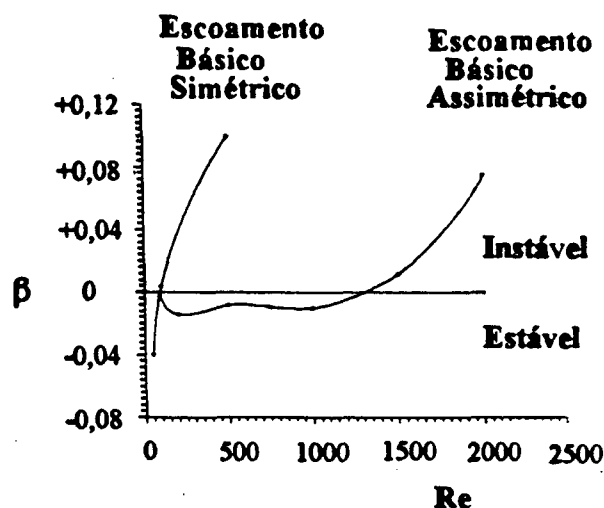


Figura 5.6 - Avaliação do autovalor  $\beta$  para canal com  $r_x=3$ , considerando padrões simétricos e assimétricos (Modelo 0).

Da figura 5.6 tem-se um primeiro número de Reynolds crítico,  $Re_1$ , em torno de 90, para o escoamento simétrico, enquanto o segundo ponto de bifurcação,  $Re_2$ , ocorreu em torno de 1300 para o escoamento básico assimétrico. Nota-se que o escoamento assimétrico apresenta uma região de máxima estabilidade entre  $Re_1$  e  $Re_2$ . Isto já era esperado, afinal próximo dos pontos de bifurcações o escoamento está sob efeitos de uma estabilidade neutra, onde os dois padrões, antes e depois da bifurcação, são relativamente estáveis.

Para cada faixa de número de Reynolds analisada há uma maneira particular de calcular o valor de  $\beta$ . Para baixos números de Reynolds pode-se calcular  $\beta$  diretamente através da eq. (3.20), válida para comportamento monotônico. A partir de um certo valor de Reynolds, iniciam-se oscilações no valor de  $\beta$ , haja visto que a energia média global  $\epsilon$  não apresenta mais uma evolução temporal logarítmica, pois as perturbações deixam de ter comportamento monotônico. Esta oscilação nos valores de  $\beta$  é crescente com o número de Reynolds. Primeiramente  $\beta$  oscila em torno de um valor médio bem definido, de modo que basta tirar uma média aritmética numa faixa que inclua pelo menos um valor máximo e um mínimo, para então ter-se o valor correto de  $\beta$ . A partir de um certo número de Reynolds, esta oscilação é intensificada, de modo que há a necessidade de se tomar os picos, de máxima ou mínima energia  $\epsilon$ , juntamente com o intervalo de tempo  $\Delta\tau$  em que estes ocorrem. Desta forma pode-se avaliar, quantitativamente, a tendência da energia para o amortecimento ou para a amplificação. Portanto, pode-se aplicar a própria eq. (3.20), porém aos valores de pico de energia  $\epsilon$ .

Este cálculo baseado nos picos de  $\epsilon$  é análogo ao apresentado por Kelkar e Patankar (1989), onde avalia-se  $\beta$  em função dos picos de perturbação de velocidade em um ponto qualquer do domínio, ou seja,

$$\beta = \frac{1}{\Delta\tau} \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) \quad (5.9)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$ , são picos de uma perturbação em um ponto qualquer do escoamento, e  $\Delta t$  é o respectivo intervalo de tempo ocorrido entre  $v_1$  e  $v_2$ .

A avaliação do autovalor mais instável  $\beta$ , através das próprias perturbações de velocidade, pode ser feita de duas maneiras. A baixos valores de Reynolds, onde não há oscilações nas perturbações, pode-se tomar dois pontos consecutivos num único intervalo de tempo. Portanto, aplica-se a própria equação (5.9), porém não aos valores de pico de perturbação, mesmo porque não existem picos nesta faixa de Reynolds. Para os valores moderados e altos de Reynolds, segue-se o cálculo através dos picos máximos e mínimos já mencionados.

O cálculo do autovalor  $\beta$  através das próprias perturbações de velocidade possibilitou a verificação de uma propriedade importantíssima. Observa-se que para qualquer volume de controle que se tome do domínio discretizado, obtém-se o mesmo valor de  $\beta$ , tanto para o cálculo através de  $u$ , quanto através de  $v$ , ou mesmo através de  $\epsilon$ , desde que se tenha somente o efeito do autovalor mais instável.

Observou-se uma perfeita analogia entre a forma de calcular  $\beta$  através da energia média global  $\epsilon$ , representativa de todo o domínio computacional, dada pela eq. (3.20), e a outra forma baseada nas perturbações de um único volume de controle do domínio, eq. (5.9).

Oliveira (1992) obteve resultado semelhante, calculando  $\beta$  através da eq. (3.20) para um único volume de controle do domínio e para o domínio completo. As duas formas de cálculo forneceram o mesmo resultado, indicando uma independência de  $\beta$  com respeito ao domínio escolhido para esta avaliação.

A seguir apresenta-se na figura 5.7 um diagrama de bifurcação esquemático, conforme proposta de Sobey e Drazin (1986). Naquele trabalho propõe-se uma variável  $\zeta$  que seja representativa do grau de assimetria do escoamento, que para este caso é dada pela eq. (5.10). Este parâmetro só é válido para bifurcações em regime estacionário, pois se o mesmo for calculado para um possível regime transiente, ter-se-á um valor de  $\zeta$  para cada instante de tempo.

$$\zeta = \frac{\int_0^{11,5x} \int_0^x [\psi(x, y) - \psi(x, -y)]^2 dy dx}{11,5x^2} \quad (5.10)$$

onde  $\psi$  é o valor da função corrente local.

No diagrama da figura 5.7 tem-se uma visão global de todas as possíveis bifurcações do escoamento, para dois pontos críticos.

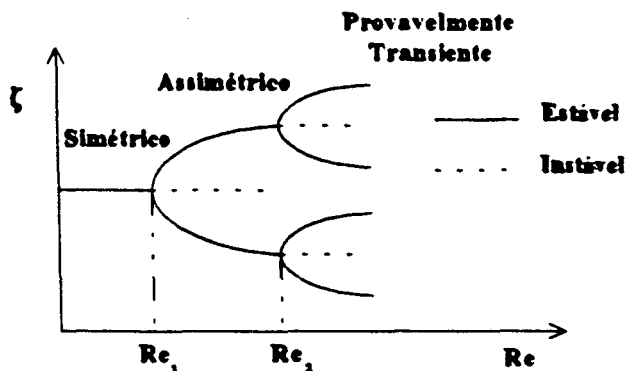


Figura 5.7 - Diagrama de bifurcação esquemático com dois pontos de bifurcação.

Para a razão de expansão  $rx=2$  obtém-se aqui um ponto de bifurcação entre escoamento simétrico e assimétrico em torno de  $Re=200$ , enquanto Cherdron et alli (1978) consegue um Reynolds crítico da ordem de 165 (valor corrigido para a presente formulação). Para razão de expansão  $rx=3$  obtém-se um primeiro Reynolds crítico da ordem de 90, enquanto Cherdron et alli (1978) apresenta um valor de transição da ordem de 45. Estes valores de Reynolds crítico também foram captados experimentalmente por Sobey (1985) para razão de expansão  $rx=3$ . Sobey observou bifurcações entre escoamentos estacionários simétrico e assimétrico, a partir de  $Re=75$  (o número de Reynolds do trabalho de Sobey é baseado na velocidade média na entrada e na metade da altura do canal de entrada, resultando um valor cerca de 3 vezes menor que o do presente trabalho;  $Re=75$  já é o valor corrigido para a definição adotada aqui). No trabalho de Sobey estudou-se apenas a razão de expansão  $rx=3$ , na qual se observa uma concordância razoável com os resultados do presente trabalho (diferença inferior a 20%). Por outro lado, observa-se uma grande discrepância entre os resultados de Sobey e os resultados de Cherdron et alli (1978). Shapira et alli (1990) também avaliaram o número de Reynolds de transição entre escoamento simétrico e assimétrico para canal com  $rx=3$  e obtiveram resultado semelhante ao de Sobey, bifurcação a  $Re=83$ .

A tabela 5.1 resume os diferentes valores mencionados anteriormente e inclui ainda os resultados numéricos de Oliveira (1992).

Tabela 5.1 - Valores de Reynolds crítico para escoamento em uma expansão plana

	Razão de Aspecto	
	$rx=2$	$rx=3$
Cherdron et alli (1978)	165	45
Sobey (1985)	-	75
Shapira et alli (1990)	-	83
Oliveira (1992)	-	80
Presente Trabalho	200	90

Exceto pelos valores de Cherdron et alli (1978) para  $rx=3$ , pode-se dizer que há uma concordância razoável entre os resultados da tabela 5.1. A discrepância entre Cherdron et alli e os demais autores, para  $rx=3$ , pode estar associada às razões de aspecto lateral do canal (efeitos tri-dimensionais) conforme discutido por Oliveira (1992), página 85.

A seguir a atenção será focalizada em problema tipicamente transiente.



### 5.3 - Estabilidade Linear em Escoamento sobre Prisma Quadrado

As equações de Navier-Stokes completas, discretizadas para regime transiente, podem captar a evolução do escoamento a partir de uma certa condição inicial perturbada, como já foi visto no item 5.2. Porém, no momento, é importante determinar-se com precisão a transição entre o amortecimento ou amplificação das perturbações. Esta determinação é feita com exatidão através das perturbações isoladas do escoamento básico e, desta forma, pode-se encontrar, precisamente, um ponto de bifurcação, caso exista.

Nesta secção objetiva-se validar a equação das pequenas perturbações para escoamentos transientes, uma vez que estas já foram aplicadas a escoamentos estacionários. Agora, tentar-se-á reproduzir os resultados obtidos por Kelkar (1988) e Kelkar e Patankar (1989), em um escoamento livre sobre um prisma quadrado, que tem por característica uma bifurcação entre escoamento estacionário e escoamento transiente. É importante salientar que as pequenas perturbações são avaliadas através da teoria linear e, portanto, o ponto de bifurcação que será obtido é o Reynolds limite ( $Re_c$ ), conforme figura 3.1.

Primeiramente empregar-se-á a mesma metodologia utilizada no item 5.2, com ênfase para a aplicação da discretização temporal de Crank-Nicolson (1953), visto que o escoamento sobre o prisma quadrado é comprovadamente transiente. No item 5.2 esta discretização não foi relevante, mas o escoamento estudado não era transiente, apenas as equações das pequenas perturbações eram dependentes do tempo.

O escoamento em questão consiste num fluxo paralelo, livre de paredes, incidindo transversalmente sobre um prisma quadrado. Computacionalmente um domínio de fronteira livre deve ser limitado e, neste caso, adotou-se o domínio de solução conforme figura 5.8. O ponto 1 desta figura representa o local escolhido para a avaliação das perturbações nas figuras subsequentes.

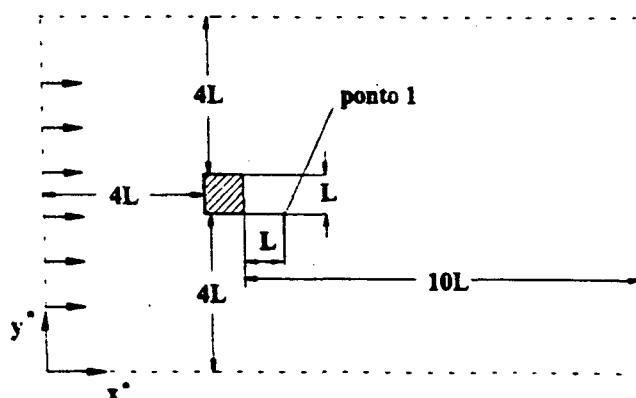


Figura 5.8 - Domínio de cálculo do escoamento sobre prisma quadrado (Kelkar, 1989).

Nota-se que as fronteiras do domínio computacional, conforme ilustrado na figura 5.8, estão suficientemente afastadas do corpo sólido, de modo a não afetar o escoamento em torno do prisma. A rigor um escoamento com domínio aberto só tem fronteiras no infinito, por isso Kelkar (1988) determinou as mínimas distâncias necessárias para captação do escoamento sem influência das fronteiras. Estas distâncias são utilizadas no presente trabalho e são as utilizadas na figura 5.8.

As equações para o escoamento transiente, considerando fluido newtoniano e propriedades constantes, podem ser escritas na seguinte forma adimensional,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (5.13)$$

onde

$$U = U^* / U_m, \quad V = V^* / U_m, \quad P = P^* / \rho U_m^2$$

$$x = x^* / L, \quad y = y^* / L, \quad \tau = t U_m / L \quad (5.14)$$

$$Re = U_m L / \nu$$

onde  $U_m$  é a velocidade da corrente livre e \* indica as variáveis dimensionais.

As condições de contorno associadas ao problema são,

$x=0$	$U=1, V=0$
$x=15$	$\partial^2 U / \partial x^2 = \partial^2 V / \partial x^2 = 0$
$y=0$ e $y=9$	$\partial U / \partial y = V = 0$
Sólido	$U = V = 0$

(5.15)

Substituindo o escoamento completo  $(U,V,P)$  pelo seu respectivo escoamento básico  $(U_b, V_b, P_b)$  sujeito a uma pequena perturbação  $(u, v, p)$ , conforme eq. (3.9)  $(\bar{U} = \bar{U}_b + \bar{u})$ , obtêm-se as equações linearizadas das perturbações, de acordo com a metodologia e restrições expostas no capítulo 3. Tais equações seguem a mesma adimensionalização introduzida nas eqs. (5.14) e são,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial (U_b u)}{\partial x} + \frac{\partial (V_b u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial U_b}{\partial x} + v \frac{\partial U_b}{\partial y} \right) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial (U_b v)}{\partial x} + \frac{\partial (V_b v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( u \frac{\partial V_b}{\partial x} + v \frac{\partial V_b}{\partial y} \right) \quad (5.18)$$

As condições de contorno e inicial associadas às eqs.(5.16-18) são,

$x=0$	$u=0, v=0$	(5.19)
$x=15$	$\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 v / \partial x^2 = 0$	
$y=0$ e $y=9$	$\partial u / \partial y = v = 0$	
Sólido	$u = v = 0$	
$\tau=0$	Perturbações assimétricas arbitrárias	

As condições de contorno de derivada nula para fronteira direita foram testadas e não se mostraram satisfatórias nem para o escoamento básico nem para as perturbações. Por isso, adotou-se como valor no contorno uma extrapolação linear dos valores vizinhos internos, que equivale a uma condição de derivada segunda nula no contorno. Presentemente tem-se explorado diferentes possibilidades para as condições de contorno na saída do domínio, mas conclui-se que esta é uma condição de contorno satisfatória. Para maiores discussões sobre o assunto ver Botaro (1990).

Observe-se que, assim como a equação de Navier-Stokes, a equação das pequenas perturbações pode ser escrita na forma conservativa, o que facilita a implementação das metodologias numéricas.

No Capítulo 4 apresentou-se a equação de Navier-Stokes com discretização temporal via Crank-Nicolson, juntamente com a equação das pequenas perturbações. Agora, para comprovar a validade da equação das pequenas perturbações em escoamentos transientes, deve-se primeiro

obter o escoamento básico para os números de Reynolds de interesse do problema em estudo. Para isto usar-se-á o Modelo 0 de discretização, proposto por Patankar (1980). Portanto, numa primeira etapa, buscar-se-á responder se um escoamento básico estacionário aparentemente estável é realmente estável a pequenas perturbações. Parte-se da premissa de que o escoamento é inicialmente estacionário e utilizam-se as equações (5.11-13) para obter-se o escoamento básico estacionário. As seguintes recomendações feitas por Langer (1991) são adotadas,

- a). O intervalo de tempo de integração das equações deve ser de ordem superior ao período de oscilação do escoamento se ele estivesse em movimento transitório periódico. Neste exemplo, já se sabe que para  $Re=100$  o período de oscilação adimensional é da ordem de 10 e, portanto, pode-se usar um intervalo de integração temporal da ordem de 10 ou maior;
- b). Além de se impôr um regime transiente distorcido, aplica-se uma sub-relaxação na atualização do novo campo, que deve ser necessariamente mais forte para valores de  $Re$  mais elevados.

Os cuidados citados anteriormente são desnecessários nos casos de escoamento estável. Porém, para valores de Reynolds acima do crítico, a convergência é difícil e só é conseguida se forem eliminadas ainda as varreduras transversais do TDMA e do algoritmo de correção em bloco. Isto permite a obtenção da solução estacionária simétrica sobre o prisma quadrado, mesmo que esta solução seja instável. Isto deve-se à total eliminação de todo tipo de perturbação sobre o escoamento, inclusive a perturbação numérica.

Outra maneira de se obter os escoamentos básicos citados é através do método da continuação. Este método foi empregado por Kelkar (1988) para obtenção das suas soluções estacionárias. Porém, os sistemas de equações gerados nesta discretização são muito grandes devido à solução simultânea das equações de  $U$ ,  $V$  e  $P$ . Para um domínio de  $N$  volumes de controle gera-se um sistema de equações lineares de ordem  $3N^2$ , cuja solução necessita de métodos especiais de blocagem do sistema.

Na figura 5.9 são apresentados os escoamentos básicos estacionários obtidos para a geometria do prisma quadrado. Nestes escoamentos existem duas grandes recirculações simétricas na região posterior ao prisma quadrado, mas existem também recirculações junto às paredes inferior e superior devido à separação do escoamento que incide na face frontal do prisma. Um exemplo destas recirculações secundárias é apresentado em uma ampliação da região superior ao prisma para  $Re=50$  na figura 5.10.

Os escoamentos básicos simétricos apresentados na figura 5.9 são então perturbados, via um campo de perturbações inicial assimétrico, e as equações das pequenas perturbações são integradas ao longo do tempo via esquema de Crank-Nicolson, utilizando-se a mesma discretização da equação de Navier-Stokes, ou seja o Modelo 0.

A rigor, a condição inicial de perturbação deve ser assimétrica em relação à linha horizontal que divide o domínio em duas metades e também satisfazer as condições de contorno e

a equação da continuidade das perturbações. Como isto é difícil de ser obtido através de um campo arbitrário, usa-se um campo assimétrico qualquer e resolvem-se as equações por um intervalo de tempo  $\Delta\tau = 1,0$  para ajustar o campo às condições de contorno e continuidade. A partir deste ponto ajustado, inicia-se a integração temporal propriamente dita via Crank-Nicolson, partindo de uma condição inicial adequada. O campo inicial assimétrico utilizado é definido pela equação (5.20) onde  $Q$  assumiu o valor  $10^{-4}$  para todos os casos estudados.

$$u(x,y,0)=(x/15)(y/9)Q \text{ e } v(x,y,0)=0 \quad (5.20)$$

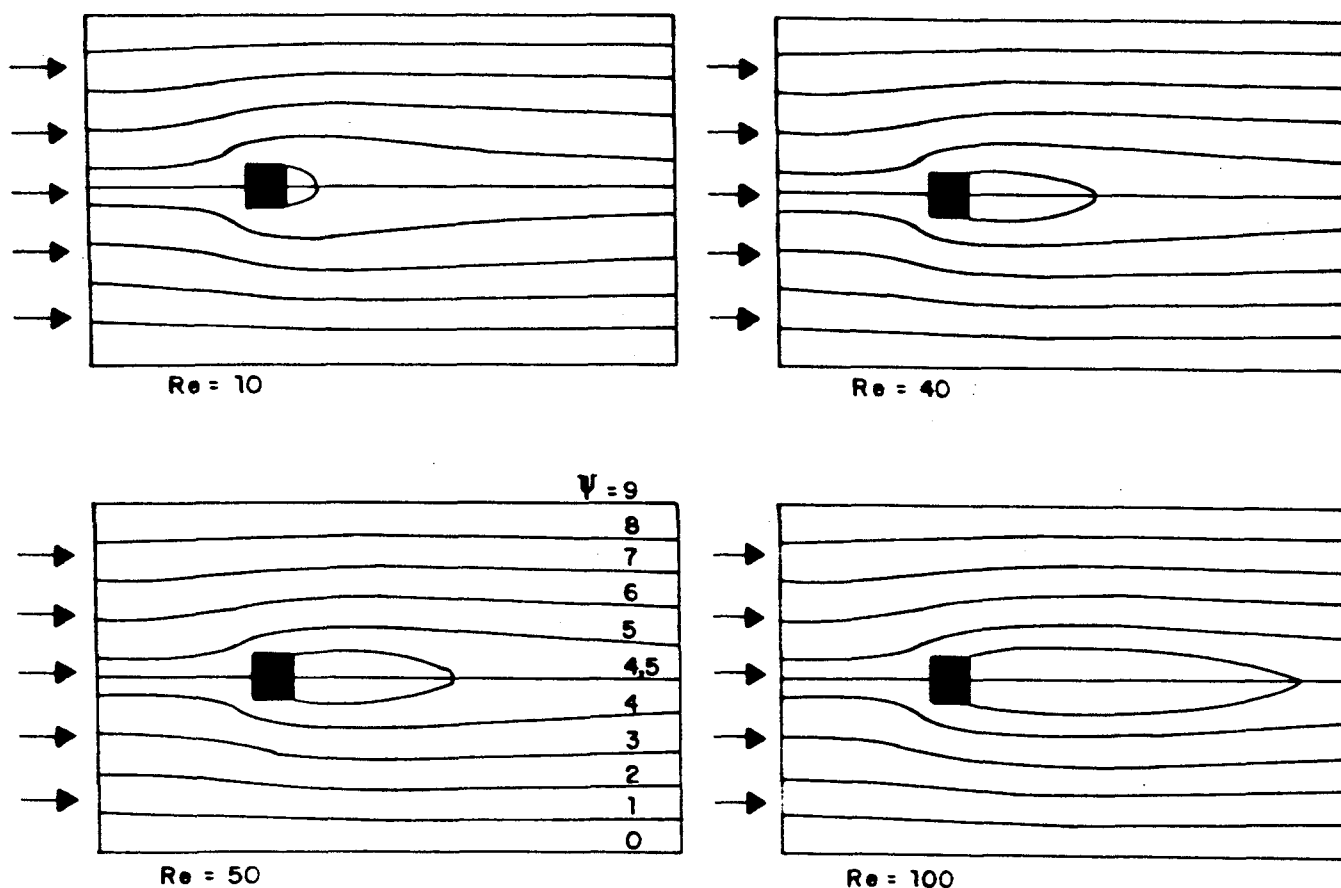


Figura 5.9 - Escoamentos básicos estacionários sobre o prisma quadrado para os  $Re$  10, 40, 50 e 100.

Inicialmente tentou-se aplicar perturbações simétricas proporcionais ao escoamento básico simétrico, pois estas satisfaziam as condições de contorno e continuidade. Tal prática no entanto resultou em um amortecimento das perturbações para toda a faixa de número de Reynolds, inclusive na faixa superior ao Reynolds crítico. Por isso, adotou-se a condição inicial assimétrica arbitrária dada pela eq. (5.20).

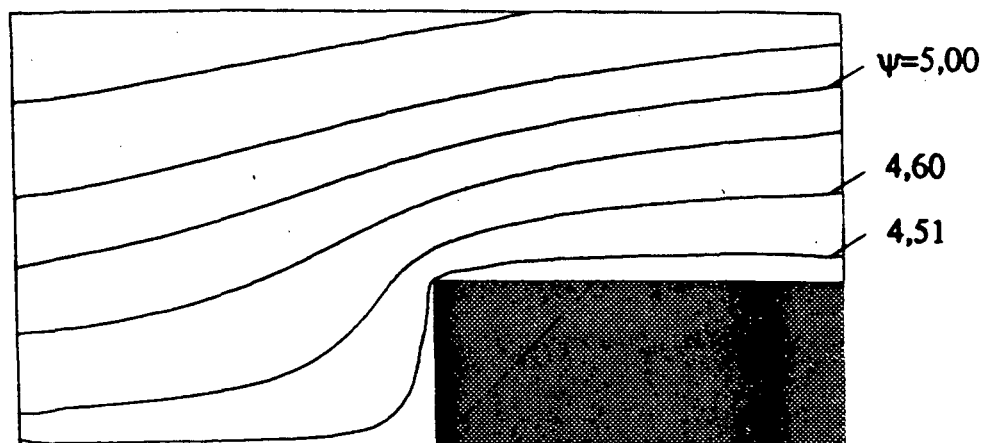


Figura 5.10 - Ampliação do escoamento sobre prisma quadrado na região da borda de ataque para  $Re=50$ .

Na figura 5.10 tem-se a ampliação do campo de linhas de corrente para a região superior do prisma quadrado ( $4 < x < 6$  e  $4,5 < y < 6$ ). Não surgem recirculações nesta faixa de número de Reynolds ( $Re=50$ ) na região da borda de ataque do escoamento sobre o prisma. Esperava-se que ocorresse uma separação do escoamento ao mudar bruscamente de direção ao contornar o sólido. Este é um efeito de separação claro nas faixas mais altas de Reynolds e não foi verificado para esta malha utilizada ( $102 \times 98$ ) a número de Reynolds igual a 50.

A seguir apresenta-se uma sequência de figuras contendo a evolução temporal de  $u$  e  $v$  para o "ponto 1" da figura 5.8, juntamente com a evolução da energia média global  $\epsilon$  e do autovalor  $\beta$  calculado pela eq. (3.20), para números de Reynolds iguais a 10, 30, 40, 50 e 100, figuras 5.11-15, respectivamente. Tais figuras foram obtidas usando-se a metodologia proposta por Patankar (1980), ou seja o Modelo 0 para resolver as equações das pequenas perturbações.

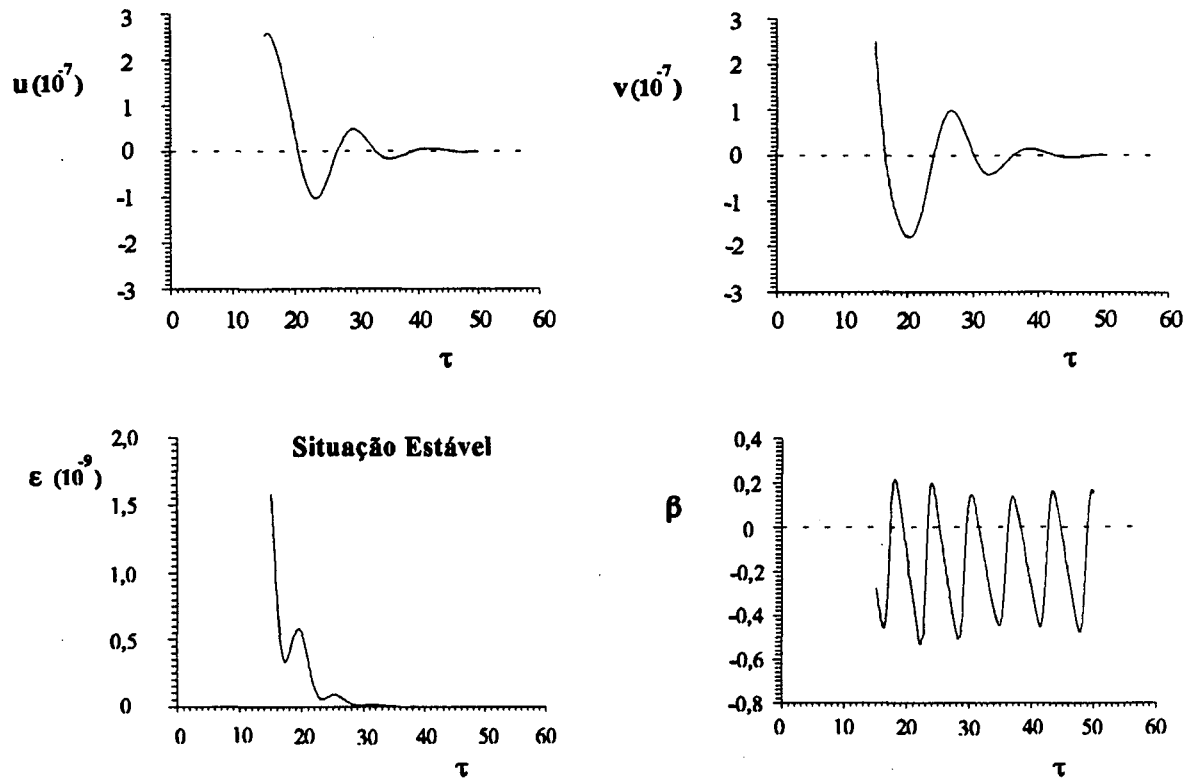


Figura 5.11 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=10$  obtida com Modelo 0.

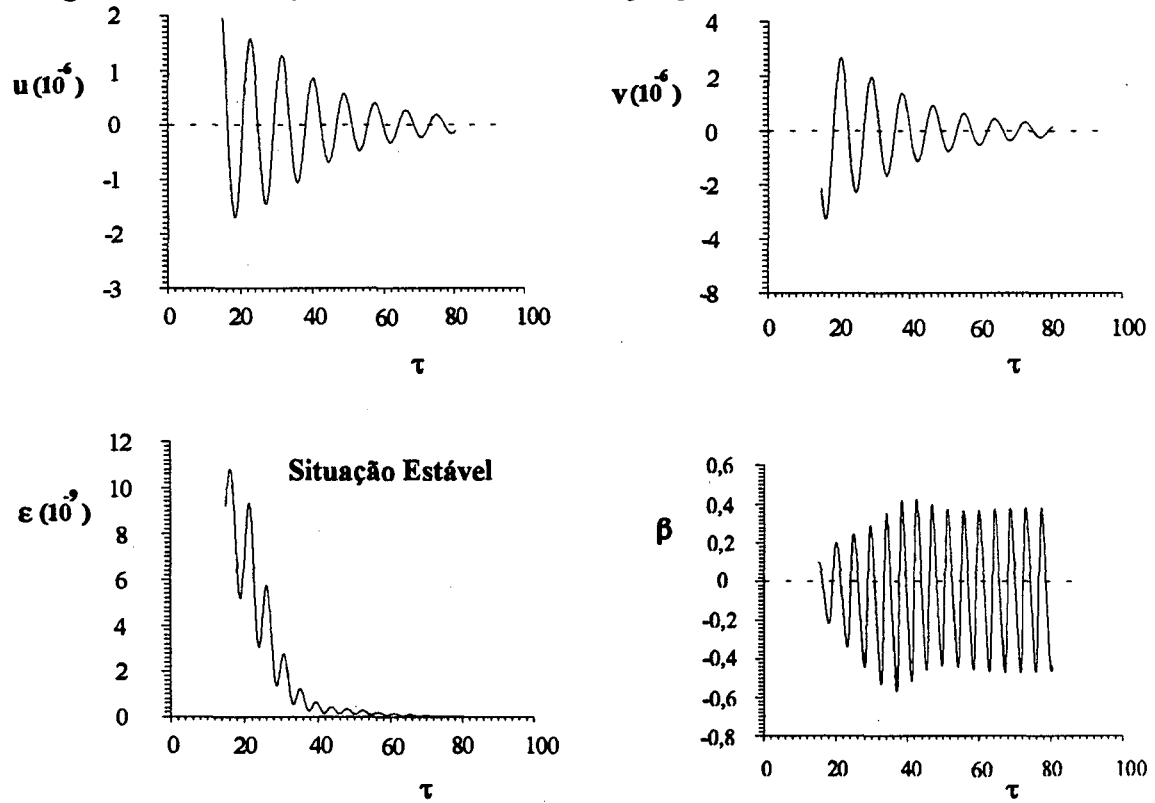


Figura 5.12 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=30$  obtida com Modelo 0.

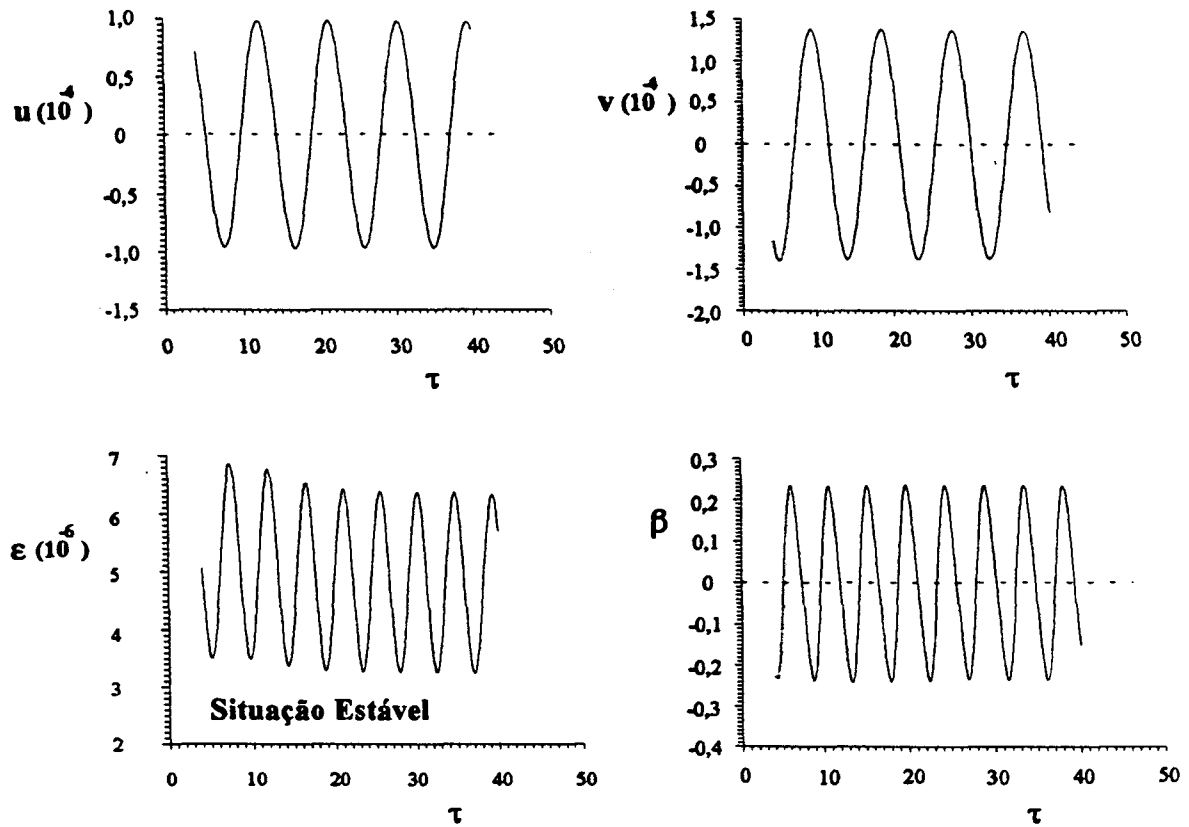


Figura 5.13 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo para  $Re=40$  obtida com Modelo 0.

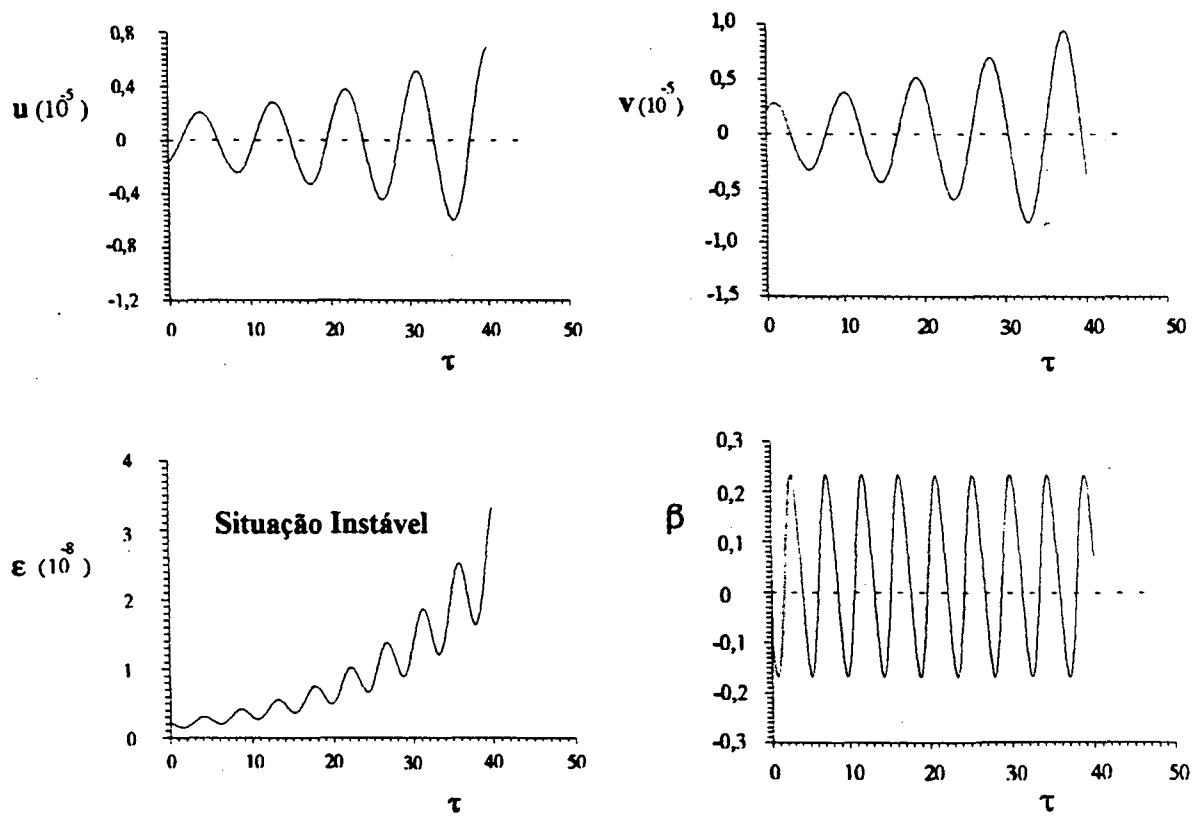


Figura 5.14 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=50$  obtida com Modelo 0.



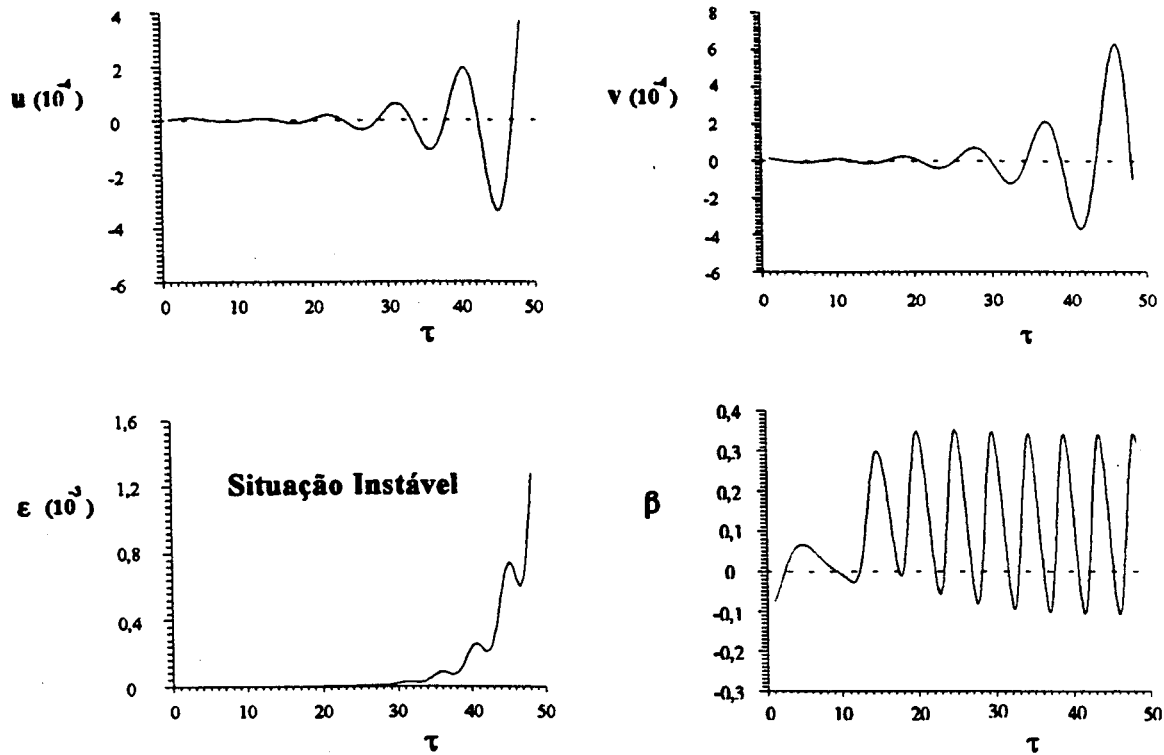


Figura 5.15 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=100$  obtida com Modelo 0.

Na figura 5.16 mostra-se uma outra maneira de visualização da estabilidade de um escoamento a pequenas perturbações. Nesta apresenta-se a evolução temporal de  $v$  versus  $u$  obtida com o Modelo 0 para o "ponto 1" da figura 5.8, onde pode-se observar o "raio atrator" das perturbações. Neste problema específico, os casos de estabilidade do escoamento convergem para um raio atrator nulo e os casos de instabilidade convergem para um raio atrator infinito, onde ocorre amplificação das perturbações.

Como já foi visto anteriormente, para escoamentos estacionários o autovalor  $\beta$  pode ser calculado pela variação da energia média global, eq. (3.20), ou pela variação das perturbações de velocidade. Ambas as formas fornecem o mesmo resultado; porém, neste exemplo específico, tem-se um comportamento oscilatório periódico das perturbações, o que caracteriza uma bifurcação de Hopf. Tal bifurcação ocorre entre um escoamento de padrão estacionário e um outro de padrão transiente e, neste caso, a tomada consecutiva da energia  $\epsilon$ , ou das próprias perturbações, fornece um valor de  $\beta$  oscilatório, conforme apresentado pelas figuras 5.11-15. Desta forma o autovalor mais instável  $\beta$  deve ser calculado a partir da evolução temporal dos picos de energia média global  $\epsilon$ , ou através dos picos de uma perturbação de velocidade de qualquer ponto do domínio. Este autovalor  $\beta$  representa a taxa de crescimento ou amortecimento das perturbações e pode ser calculado através da evolução exponencial de  $u$  (ou de  $v$ ), ou pela própria eq. (3.20), aplicada aos picos de energia  $\epsilon$ . Para calcular-se  $\beta$ , através das perturbações de velocidade, tomam-se dois picos, consecutivos ou não,  $v_1$  e  $v_2$ , de uma perturbação qualquer, e o respectivo intervalo de tempo  $\Delta\tau$  ocorrido entre  $v_1$  e  $v_2$ . Com estes dados aplica-se a eq. (5.9), que é deduzida a partir

da evolução exponencial no tempo de uma perturbação oscilatória periódica. Uma outra forma de calcular o autovalor  $\beta$  consiste em tomar dois picos de energia média global  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , consecutivos ou não, juntamente com o correspondente intervalo de tempo  $\Delta\tau$ , e aplicá-los à própria eq. (3.20). Conforme,

$$\beta = \frac{1}{2\Delta\tau} \ln \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \quad (5.21)$$

Assim obtém-se o mesmo valor de  $\beta$  com a eq. (5.9), ou com a eq. (5.21), independentemente da posição no domínio de cálculo que se escolha para a avaliação de  $\beta$ . Tal conclusão é análoga a aquela obtida com o escoamento em expansão plana da secção 5.2.

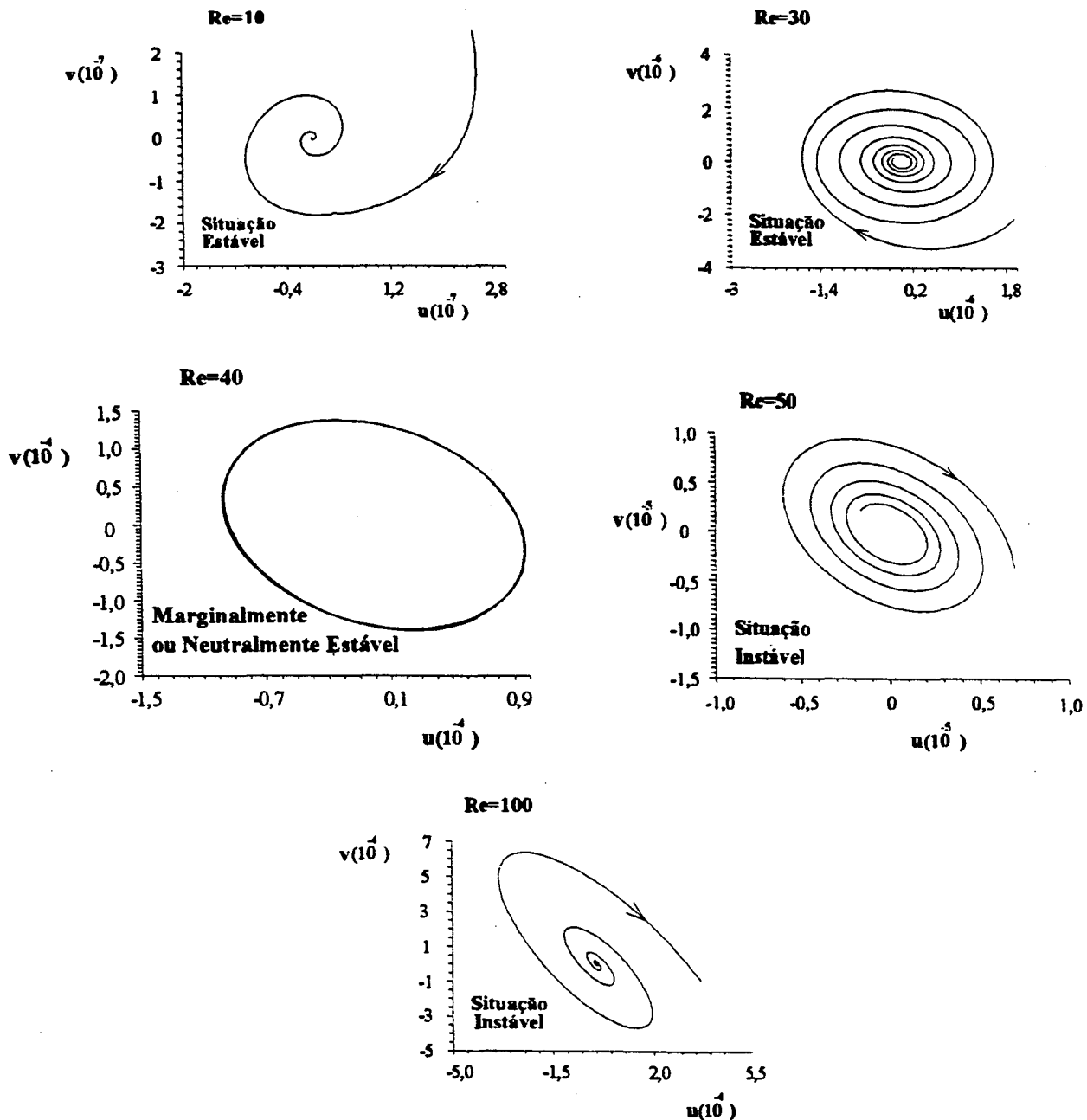


Figura 5.16 - Evolução temporal de  $v$  versus  $u$  para os números de Reynolds 10, 30, 40, 50 e 100.

O valor de  $\beta$  é a parcela real do autovalor mais instável associado à equação das perturbações, conforme descrição do capítulo 3. O valor real  $\beta$  representa a taxa de crescimento, ou amortecimento, das amplitudes de perturbação, enquanto a parcela imaginária fornece o seu período de oscilação.

Nas figuras 5.11-15 pode-se observar também que o escoamento apresenta comportamento oscilatório com período bem definido, tanto para  $u$ , quanto para  $v$ , semelhantemente aos resultados obtidos por Kelkar (1988). Observa-se ainda, que além de se ter um período de oscilação constante para cada valor de  $Re$ , a taxa de crescimento ou amortecimento também é a mesma para qualquer ponto do domínio sujeito a oscilação, indiferentemente para  $u$  ou  $v$ . Apenas em um intervalo inicial de oscilação, em que a evolução das perturbações ainda não entrou em regime, a afirmação anterior não se verifica. Segundo a teoria espectral, neste intervalo inicial, o espectro das perturbações está sendo influenciado por outros autovalores menos instáveis, mas que acabam por amortecer rapidamente. Neste intervalo inicial não é possível identificar apenas um autovalor.

O comportamento das perturbações para  $Re=100$  foi testado também com discretização temporal totalmente implícita. Neste caso gerou-se um pequeno amortecimento numérico sobre o comportamento das perturbações, mas o autovalor  $\beta$  diminuiu menos que 2% do valor em relação ao esquema de Crank-Nicolson (1953). Portanto, daqui para diante usar-se-á apenas o esquema totalmente implícito por ser mais simples e computacionalmente mais econômico.

Paralelamente aos resultados apresentados com o Modelo 0, calculou-se o autovalor  $\beta$  através de uma metodologia numérica equivalente ao Modelo 4, onde resolveram-se as equações das pequenas perturbações partindo-se de um escoamento básico também obtido com o modelo 4. Neste caso utilizou-se malha desencontrada com interpolação QUICK consistente e discretização temporal totalmente implícita. A evolução temporal das perturbações avaliadas através do Modelo 4 são apresentadas nas figuras 5.17-18, respectivamente para  $Re=40$  e  $Re=50$ .

Nota-se que com o Modelo 4 as perturbações mantêm-se dentro do mesmo padrão obtido com o Modelo 0. No caso específico da energia média global obtida para  $Re=40$ , tem-se um amortecimento um pouco maior na figura 5.17 que no caso obtido na figura 5.13, mas esta não é uma diferença significativa. Esta diferença é atribuída principalmente ao uso do esquema de Crank-Nicolson (1953) na figura 5.13 em comparação ao esquema totalmente implícito usado na figura 5.17.

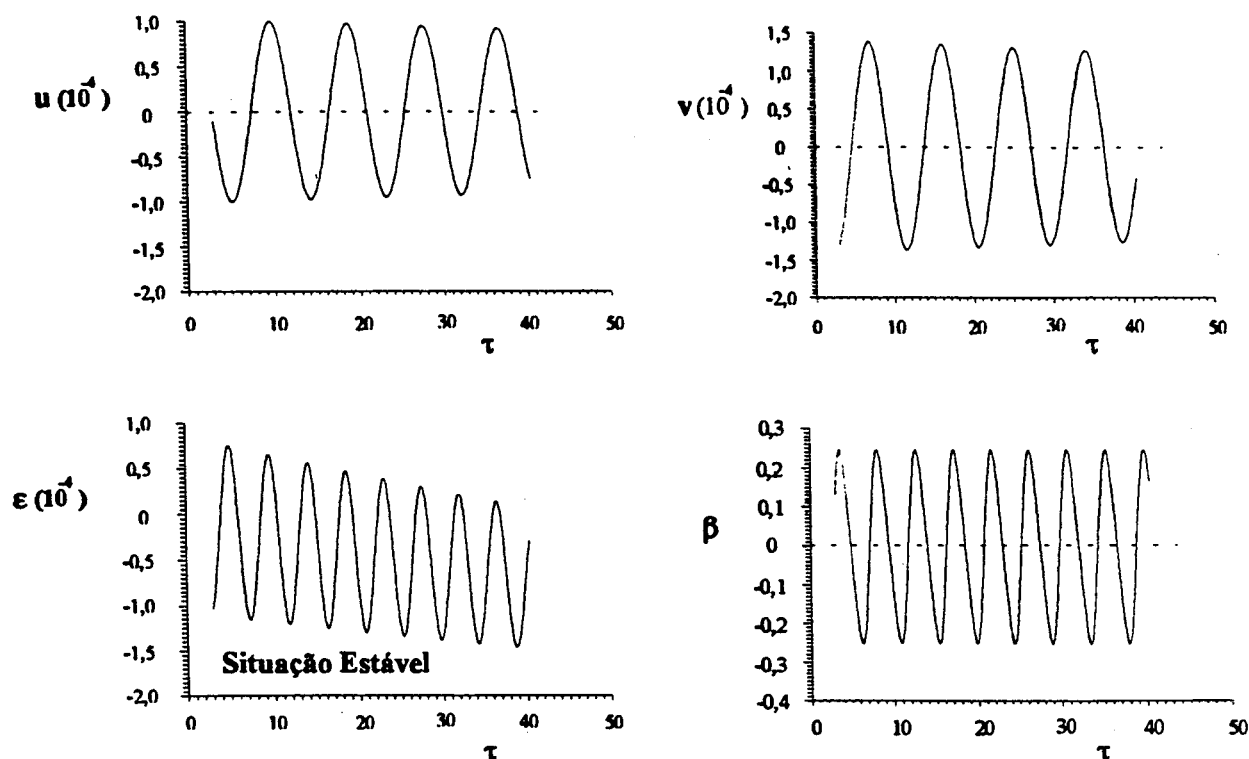


Figura 5.17 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=40$  obtido com Modelo 4.

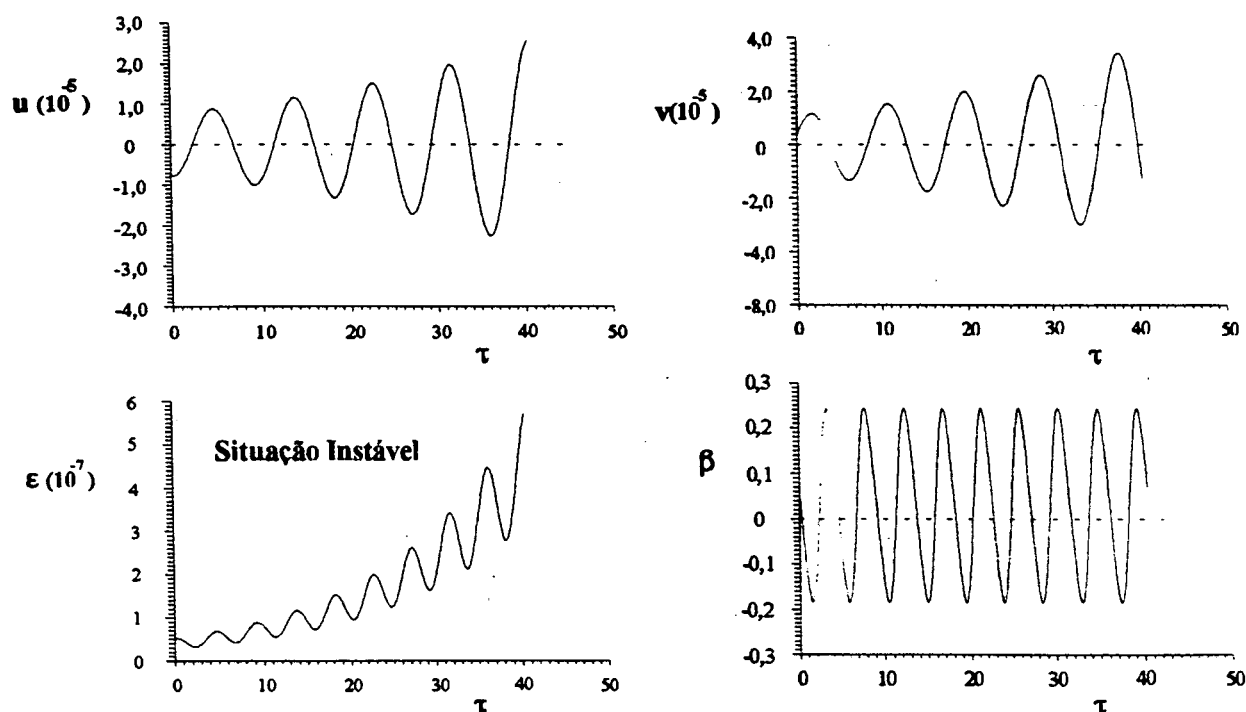


Figura 5.18 - Variação de  $u$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  e  $\beta$  com tempo, para  $Re=50$  obtido com Modelo 4.

A seguir mostra-se um confronto entre os resultados do presente trabalho e os obtidos por Kelkar (1988), do ponto de vista quantitativo de taxa de crescimento  $\beta$ . Tal comparação é apresentada na figura 5.19.

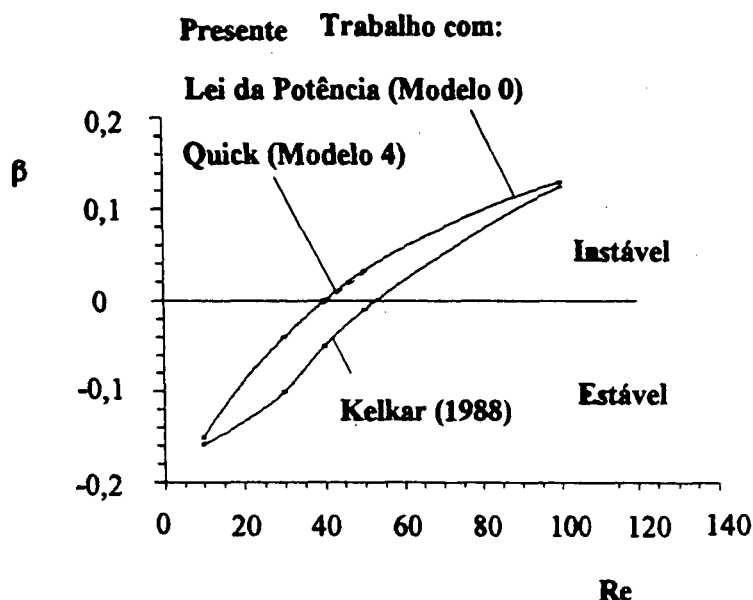


Figura 5.19 - Evolução da taxa de crescimento  $\beta$  com o número de Reynolds para escoamento sobre prisma quadrado.

Nota-se que há um desvio dos resultados do presente trabalho e de Kelkar (1988) com relação ao ponto de bifurcação. No presente trabalho perturbações do escoamento a números de Reynolds menores que 40 foram amortecidas, enquanto que para  $Re$  maiores que 40 as perturbações foram amplificadas. Verifica-se que o valor de  $Re$  crítico do presente trabalho está em torno de 40. O valor de  $\beta$  obtido com Modelo 0 a número de Reynolds igual a 40 foi em torno de -0,003 e com o Modelo 4 obteve-se um  $\beta$  da ordem de -0,005, ou seja praticamente  $\beta$  zero. Na figura 5.13, e também na figura 5.17, observa-se que as perturbações de velocidades se mantêm oscilando praticamente com a mesma amplitude, caracterizando o escoamento simétrico estacionário a  $Re=40$  como "neutramente ou marginalmente estável". Os resultados obtidos com o Modelo 0 foram confirmados pelo Modelo 4, ambos geraram um número de Reynolds crítico em torno de 40, enquanto Kelkar obteve um valor crítico em torno de 53.

Este desvio pode ser devido ao menor número de pontos utilizados na discretização de Kelkar (1988). No presente trabalho usou-se uma malha de 102 pontos na direção  $x$  e 98 na direção  $y$ , enquanto Kelkar usou 80 pontos em ambas as direções. No entanto, segundo o próprio relato de Kelkar, foram testadas até malhas de 120x120 pontos, o que não alterou significativamente o comportamento do escoamento, quanto a tamanho de recirculação e força de arrasto. Segundo Okajima (1982) e Langer (1991), o período de oscilação da esteira de vórtices existente e o coeficiente de sustentação sobre o prisma ainda são bastante sensíveis a um refino de malha nesta faixa de número de pontos analisada, o que deixa dúvidas em relação aos comentários de Kelkar (1988).

O escoamento estacionário simétrico a  $Re=50$  foi considerado instável a pequenas perturbações assimétricas, pois estas se amplificam ao longo do tempo. Tal conclusão foi obtida

com os Modelos 0 e 4, usando-se dois tipos de função de interpolação, Lei da Potência e QUICK consistente, respectivamente. Esta mesma perturbação, que foi aplicada ao escoamento básico e tratada pela teoria linear, eqs. (5.16-18), foi também incorporada ao escoamento básico e tratada como uma nova condição inicial para as equações de Navier-Stokes, eqs. (5.11-13). A evolução temporal desta condição inicial resultou num escoamento oscilatório periódico, confirmando os resultados obtidos com a teoria linear.

A fim de explorar a evolução do campo de velocidade básico após a introdução das perturbações as figuras 5.20 e 5.21 foram preparadas. Nota-se na figura 5.20 que inicialmente ocorre um desequilíbrio entre as bolsas de recirculação atrás do prisma quadrado, que passam a oscilar lentamente sem se soltar. Porém, após um tempo relativamente longo, as recirculações se desprendem sucessivamente do prisma e os vórtices são carregados pelo escoamento até que se auto-amorteçam, longe do prisma, seguindo um período bem definido,  $\Omega = 8,20$ .

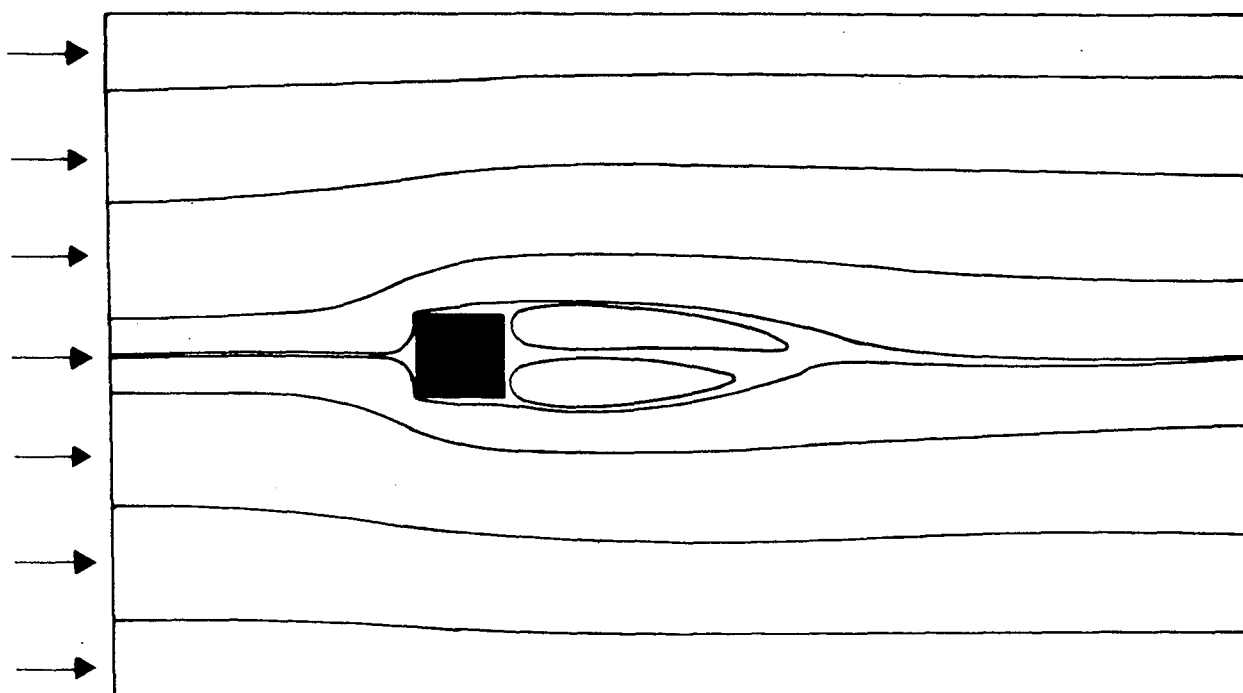


Figura 5.20 - Assimetria inicial das duas bolsas de recirculação posteriores ao prisma quadrado,  $Re=50$  (Modelo 0).

Na figura 5.21 apresenta-se a sequência evolutiva no tempo do escoamento transiente sobre o prisma quadrado, com período dividido em 10 intervalos iguais. Tais resultados foram obtidos com o Modelo 0 proposto por Patankar (1980).

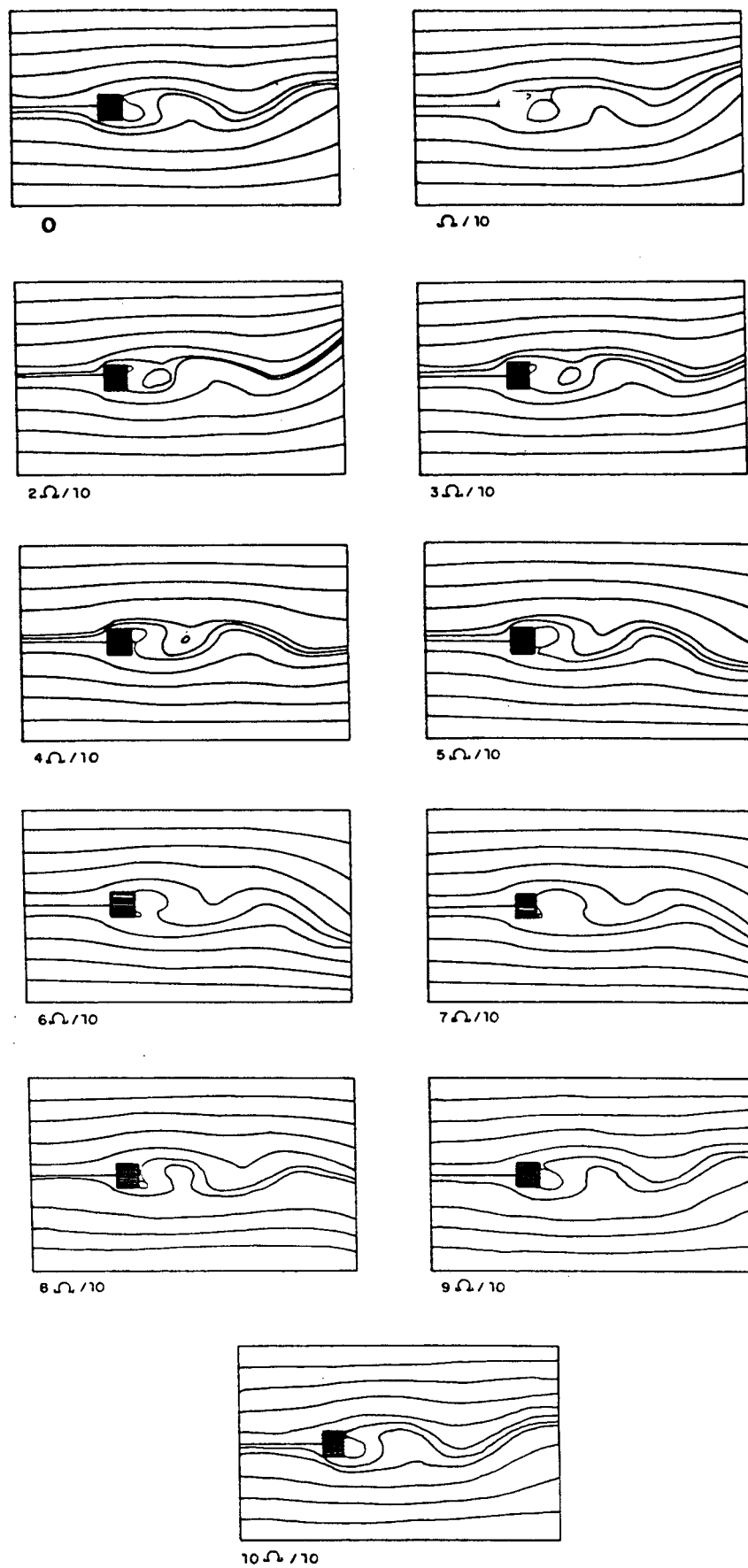


Figura 5.21 - Evolução temporal do campo de linhas de corrente para o escoamento sobre um prisma quadrado,  $Re=50$  (Modelo 0).

O exemplo citado anteriormente mostra que normalmente as conclusões obtidas a partir da equação das pequenas perturbações são as mesmas que aquelas obtidas a partir da equação de Navier-Stokes. Porém, a primeira permite maior nitidez na identificação do ponto crítico e maior rapidez na evolução temporal das perturbações, pois esta é uma equação linear. Para se conseguir notar a diferença que existe entre a teoria linear e a teoria não linear, dever-se-ia compará-las em um ponto muito próximo do crítico, onde aplicando-se grandes perturbações deve ocorrer amplificação na sua intensidade, e aplicando-se pequenas perturbações deve ocorrer o seu amortecimento.

O intervalo de tempo adimensional aplicado na integração temporal da equação das perturbações foi 0,01 para toda a faixa do número de Reynolds estudado, pois com este pequeno incremento no intervalo de tempo não houve a necessidade de utilização de fatores de sub-relaxação. Verificou-se que a utilização de fatores de sub-relaxação pode acarretar amortecimentos numéricos nas soluções transientes de escoamentos, mesmo quando se utilizam critérios de convergência temporais bastante apertados. Utilizando-se  $\Delta\tau=0,01$ , que é cerca de dez vezes menor que o recomendado (1% do período da ordem de 10), conseguiu-se manter o escoamento dentro de um critério de convergência temporal inferior a  $10^{-6}$  (resíduo da equação de conservação da massa) efetuando-se apenas uma iteração a cada avanço de tempo, além de eliminar-se completamente a necessidade do uso de fatores de relaxação.

O período de oscilação  $\Omega=8,20$  obtido na figura 5.21 para  $Re=50$  não pode ser corroborado com outros trabalhos como Langer (1991) e Okajima (1982), pois os trabalhos citados exploram faixas de Reynolds acima de 150. Porém, estes resultados são virtualmente iguais ao escoamento sobre prisma cilíndrico apresentado por Schlichting (1968) (página 32, 6ª edição). Os resultados apresentados por Schlichting (1968) fornecem a mesma relação Strouhal/Reynolds ( $= 0,12$ ) que o presente trabalho para número de Reynolds igual a 50, indicando que o escoamento sobre o prisma cilíndrico é transiente nesta faixa de Reynolds. Os resultados obtidos na figura 5.21 para  $Re=50$  servem para comprovar os resultados obtidos com a teoria linear das perturbações apresentados na figura 5.19, onde o escoamento básico simétrico estacionário a  $Re=50$  foi considerado instável.

O escoamento sobre o prisma quadrado apresentou uma pequena instabilidade numérica, visualizada na forma de uma oscilação secundária de pequena amplitude, que se alternava entre um valor máximo e mínimo a cada intervalo de tempo integrado, independentemente do incremento de tempo escolhido. Felizmente observou-se que estas oscilações secundárias eram devidas ao esquema de integração de Crank-Nicolson pois, quando adotou-se o esquema totalmente implícito, estas desapareceram.

O esquema de integração temporal de Crank-Nicolson (1953) não demonstrou superioridade significativa em relação ao esquema totalmente implícito. No caso da evolução das perturbações, não se notou variação significativa dos resultados em relação ao ponto de



bifurcação. Estes pontos de bifurcação diminuíram menos de 2% no valor do número de Reynolds quando se utilizava o esquema totalmente implícito. Portanto, não existe necessidade de se utilizar este esquema transiente, uma vez que ele é computacionalmente menos eficiente e ainda pode introduzir oscilações espúrias para certa faixa de número de Reynolds.

O escoamento transiente para  $Re=50$  também foi estudado através do Modelo 4 e do Modelo 5, que utiliza a interpolação MSOU, segundo Tamamidis e Assanis (1993). Ambos confirmaram os resultados obtidos com o Modelo 0, inclusive obteve-se o mesmo período de oscilações nas velocidades. Na sequência apresenta-se a evolução temporal da componente vertical de velocidade ( $V$ ) no ponto 1 da figura 5.8 obtida com o Modelo 0 (Lei da Potência), com Modelo 4 (QUICK) e com o Modelo 5 (MSOU).

Observa-se nas figuras 5.22-24 o mesmo comportamento da componente  $V$  de velocidade para as três formas diferentes de interpolação. Avaliou-se o período de oscilação das velocidades nos três casos e obteve-se uma excelente concordância, todos forneceram um período em torno de 8,2. Observa-se inclusive que o período de oscilação das componentes de velocidade está muito próximo do período de oscilação das perturbações de velocidades. Isto pode indicar duas coisas, primeiro que perturbações oscilatórias prevêm bifurcações para regimes também oscilatórios e segundo que o período das oscilações de perturbações é da mesma ordem que o período do escoamento transiente gerado pelas perturbações. Tais conclusões não são definitivas, mas foram verificadas no escoamento livre sobre um prisma quadrado.

Os resultados apresentados anteriormente validam os Modelos 4 e 5 em escoamentos transientes com oscilações auto-induzidas e auto-mantidas pelo próprio escoamento. Esta validação é de fundamental importância, pois tratam-se de modelos com maior precisão nas funções de interpolação. Segundo Tamamidis e Assanis (1993), os modelos com interpolação QUICK permitem o aparecimento de oscilações não físicas, o que não ocorreu no caso do prisma quadrado com Modelo 4, pois os resultados aqui apresentados foram corroborados entre os vários modelos apresentados. Já o modelo 5 com interpolação MSOU é considerado essencialmente não oscilatório, ou seja, não permite o aparecimento de oscilações decorrentes da discretização numérica. Esta validação é importante para que se possa usar os modelos apresentados em problemas físicos com pouca informação experimental, como é o caso dos escoamentos em difusores radiais, que serão estudados nos capítulos subseqüentes.

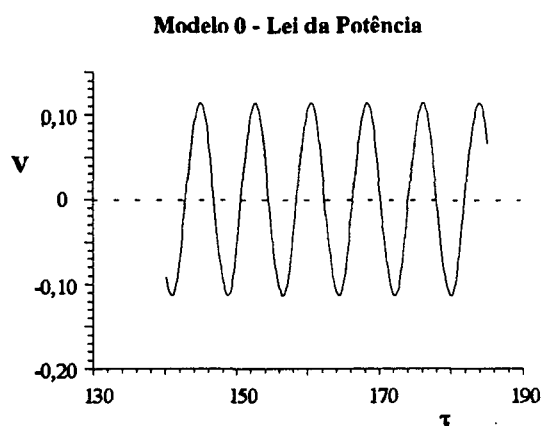


Figura 5.22 - Evolução temporal de V no ponto 1 obtida com Lei da Potência para  $Re=50$ .

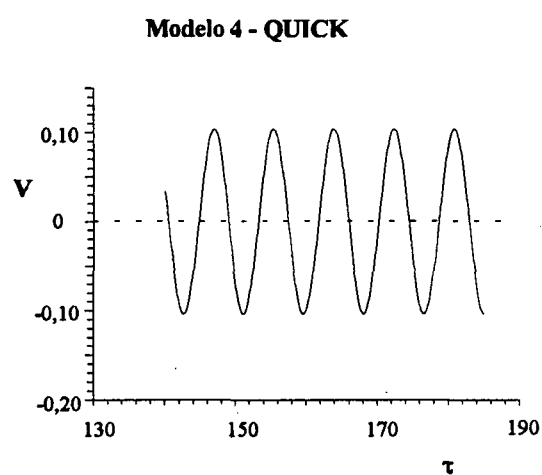


Figura 5.23 - Evolução temporal de V no ponto 1 obtida com interpolação QUICK para  $Re=50$ .

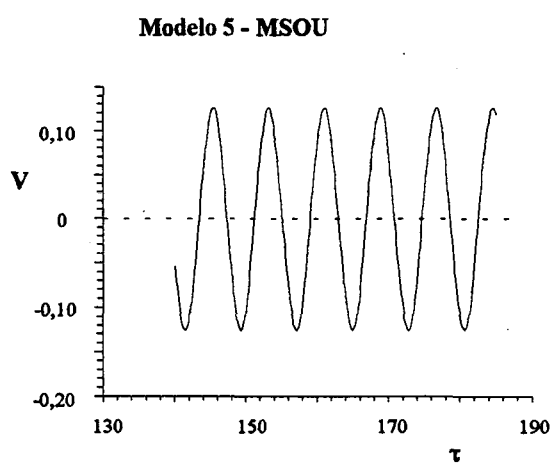


Figura 5.24 - Evolução temporal de V no ponto 1 obtida com interpolação MSOU para  $Re=50$ .

A seguir apresenta-se um estudo detalhado da estabilidade hidrodinâmica dos escoamentos em difusores radiais, aplicando-se os modelos apresentados e validados.

## Capítulo 6

### ESCOAMENTO EM DIFUSOR RADIAL COM ALIMENTAÇÃO RADIAL

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretende-se revisitar o escoamento puramente radial, e comparar os resultados obtidos por Langer (1991) (ver também Langer et alli, 1990 e 1993b) e Oliveira (1992) (ver também Oliveira et alli, 1993), com formulações alternativas que vão desde o esquema numérico tradicional proposto por Patankar (1980), até a formulação do escoamento radial em termos do produto entre o raio local e a velocidade radial ( $rV$ ) com diversas formas de interpolação das velocidades nas faces, como QUICK consistente (Hayase et alli, 1992) e MSOU (Tamamidis e Assanis, 1993).

No Capítulo 4 apresentaram-se as várias formulações que serão utilizadas nos escoamentos em difusores radiais, mas antes de aplicá-las na faixa de número de Reynolds de interesse deste trabalho, casos limites foram testados. Comparações entre a distribuição radial de pressão no difusor, obtida numericamente e analiticamente para escoamentos puramente difusivo ( $Re \rightarrow 0$ ) e invíscido ( $Re \rightarrow \infty$ ) foram realizadas. A expectativa é que, se os modelos captarem bem o escoamento nos seus limites ( $Re \rightarrow 0$  e  $\infty$ ), devem captar bem o escoamento intermediário que é o objetivo deste trabalho. Tais comparações encontram-se detalhadas no Apêndice A, onde demonstra-se que os Modelos 2, 3 e 4, baseados no esquema QUICK consistente, e o Modelo 5, baseado no esquema MSOU, são sensivelmente superiores aos Modelo 0 e 1, com interpolação via Lei da Potência, que é o modelo empregado por Langer (1991). Langer também efetuou este teste e obteve uma comparação muito boa para o caso do escoamento difusivo e uma comparação regular para a distribuição de pressão no escoamento invíscido, concluindo que no segundo caso não ocorre a recuperação plena da pressão, ou seja a distribuição de pressão numérica é cerca de 4% inferior à analítica, indicando uma não conservação de energia mecânica. No presente trabalho, a pressão obtida numericamente com os chamados modelos mais precisos (QUICK e MSOU) é recuperada no final do difusor e atinge valores ligeiramente superiores aos obtidos analiticamente. Neste caso há uma diferença máxima de 1% entre as pressões numérica e analítica, indicando uma boa conservação da energia mecânica. Cabe lembrar que no presente trabalho foram aplicados modelos mais precisos e, além disso, utilizou-se uma malha mais refinada que a malha utilizada por Langer, o que contribuiu para uma maior proximidade entre resultados numéricos e analíticos. No caso dos modelos baseados na interpolação via Lei da Potência (Modelos 0 e 1) houve um pequeno ganho na recuperação de pressão em relação ao trabalho de

Langer, mas sem dúvida os modelos mais precisos, Modelos 2, 3, 4 e 5, foram muito mais eficientes do que com os Modelo 0 e 1, análogos ao empregado por Langer (vide Apêndice A).

## 6.2. - RESULTADOS OBTIDOS COM NOVAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Langer (1991) e Oliveira (1992) apresentaram resultados baseados em formulação com variáveis primitivas discretizadas em malha desencontrada com interpolação via Lei da Potência (Modelo 0), que é uma metodologia equivalente ao Modelo 1, apresentado no capítulo 4, para variáveis colocalizadas. Para tentar captar melhor o escoamento radial no difusor radial, propuseram-se formulações alternativas baseadas na interpolação via QUICK consistente (Hayase et alli, 1992), além de um melhor refino da malha utilizada. Uma das metodologias resolve as variáveis primitivas  $U$  e  $V$  (Modelo 2 e 4) e a outra é baseada nas componente  $U$  e no produto  $rV$  (Modelo 3). Do ponto de vista da conservação da massa, a grandeza  $rV$  se conserva ao longo da direção radial, portanto é uma grandeza que não apresenta grandes variações devidas à expansão da área de passagem do fluido ao longo da direção radial. Esta mudança de variáveis conduz a um modelo análogo ao de um duto reto, onde as componentes  $U$  e  $rV$  também não apresentam variações devidas a expansões de área, mas somente devidas ao próprio escoamento. Maiores detalhes sobre estas metodologias podem ser encontrados no capítulo 4.

A seguir apresentam-se as equações governantes do escoamento em difusor radial com alimentação radial. A figura 6.1 apresenta um esquema deste difusor, que é idêntico ao estudado por Langer (1991) (ver figura 2.1). No presente trabalho adota-se  $r_0 = 2/3$ ,  $s=2$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 20$  para  $Re \leq 300$  e  $r_2 = 30$  para  $Re > 300$ .

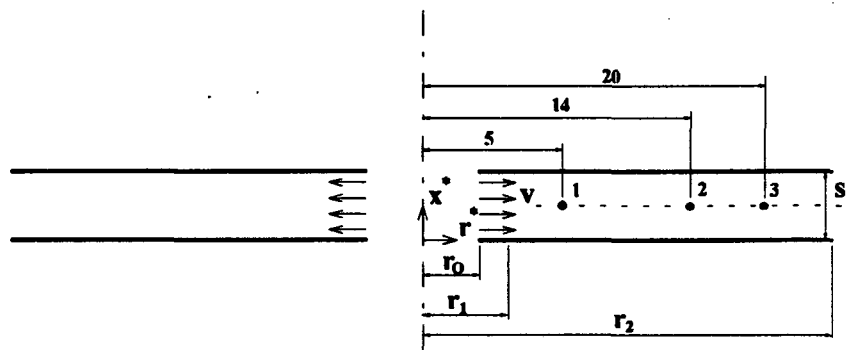


Figura 6.1 - Esquema do difusor radial com alimentação radial.

As equações governantes do problema na forma conservativa adimensional com variáveis primitivas são,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(rVU)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rUV)}{\partial x} + \frac{\partial(rVV)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{V}{r^2} \quad (6.3)$$

onde

$$U = U^*/\bar{V}, \quad V = V^*/\bar{V}, \quad P = P^*/\rho \bar{V}^2$$

$$x = x^*/r_1, \quad r = r^*/r_1, \quad \tau = \bar{V}t/r_1 \quad (6.4)$$

$$\text{Re} = \rho \bar{V} r_1 / \mu$$

e  $\bar{V}$  é a velocidade radial média em  $r_1$  (vide figura 6.1) e \* indica as variáveis dimensionais.

As condições de contorno a serem satisfeitas pelas equações anteriores são,

$r = r_0$	$V = 1/r_0$ e $\partial U / \partial r = 0$
$r = r_2$	$\partial^2 U / \partial r^2 = \partial^2 (rV) / \partial r^2 = 0$
$x=0$ e $r < r_1$ $x=S$ e $r < r_1$	$U=0$ e $\partial V / \partial x = 0$
$x=0$ e $r < r_1$ $x=S$ e $r < r_1$	$U = V = 0$

(6.5)

onde  $S$  é a razão entre o espaçamento de discos e o raio inicial do difusor ( $S = s/r_1$ ), e para todos os casos estudados no presente trabalho,  $S=2$ .

Por simplificação de nomenclatura, a metodologia numérica baseada nas variáveis primitivas, discretizadas em esquema colocalizado e com interpolação via QUICK consistente, foi definida como Modelo 2 (vide capítulo 4), assim como, o Modelo 4 é baseado em malha desencontrada com interpolação QUICK consistente e o Modelo 5 é baseado na interpolação MSOU.

As equações governantes baseadas em  $U$  e  $V_r$ , conforme capítulo 4, onde  $V_r = rV$  são,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_r)}{\partial r} = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rUU)}{\partial x} + \frac{\partial (V_r U)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rUV_r)}{\partial x} + \frac{\partial (V_r V_r)}{\partial r} \right] = -r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{r \text{Re}} \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (6.8)$$

onde as seguintes adimensionalizações foram adotadas,

$$U = U^*/r_1 \bar{V} \quad , \quad V_r = V_r^*/r_1 \bar{V} \quad , \quad P = P^*/\rho \bar{V}^2$$

$$x = x^*/r_1 \quad , \quad r = r^*/r_1 \quad , \quad \tau = \bar{V}t/r_1 \quad (6.9)$$

$$\text{Re} = \rho \bar{V} r_1 / \mu$$

onde  $\bar{V}$  é a velocidade radial média em  $r_1$  (vide figura 6.1) e \* indica as variáveis dimensionais.

As condições de contorno associadas às equações (6.6) a (6.8) são as mesmas apresentadas para as variáveis  $U$  e  $V$ .

A metodologia numérica baseada nas variáveis modificadas  $U$  e  $rV$ , discretizadas em esquema colocalizado e com interpolação via QUICK consistente foi definida como Modelo 3 (vide capítulo 4).

A seguir apresenta-se uma comparação entre as configurações de escoamentos em difusor radial com alimentação radial, obtidas com diferentes metodologias de discretização em malha colocalizada. Escolheu-se um valor de  $\text{Re}=100$  já estudado por Raal (1978) e Langer (1991) com malha não igualmente espaçada de 60 pontos na direção transversal e 90 pontos para a direção radial. Para escoamentos a  $\text{Re}$  superior a 300 usa-se malha de  $60 \times 135$  pontos. Conforme mencionado anteriormente para  $\text{Re} \leq 300$  o domínio de solução possui  $r_2 = 20$  ao passo que para  $\text{Re} > 300$  o domínio passa a  $r_2 = 30$ .

O escoamento obtido com as variáveis primitivas discretizadas em malha colocalizada com interpolação via Lei da Potência (Modelo 1), apresentado na fig. 6.2.a, reproduz fielmente os resultados obtidos por Langer com discretização em esquema desencontrado (Modelo 0). Este é um resultado esperado, pois o esquema colocalizado não altera a essência do método dos volumes finitos proposta originalmente em esquema desencontrado por Patankar (1980).

A implementação da interpolação QUICK consistente ao esquema colocalizado não trouxe alteração alguma ao escoamento neste número de Reynolds, conforme linhas de corrente da figura 6.2.b.

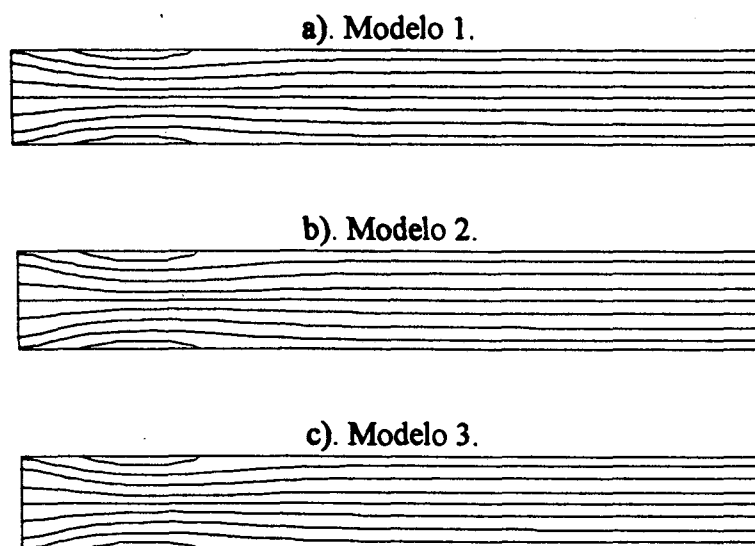


Figura 6.2 - Comparações entre a configuração de escoamento obtida com diferentes modelos aplicados ao difusor radial com alimentação radial para  $Re=100$ .

Na figura 6.2.c apresenta-se o escoamento obtido com o Modelo 3, onde resolvem-se as equações para  $U$  e  $rV$  com interpolação via QUICK consistente. Tal modelo gerou resultado idêntico aos modelos anteriormente empregados para este número de Reynolds.

Os resultados da figura 6.2 servem basicamente de validação para os Modelos 1, 2 e 3 em relação ao Modelo 0 proposto por Patankar (1980). Neste número de Reynolds há uma confirmação plena destas metodologias em relação ao modelo proposto por Patankar (1980).

O Modelo 3, empregado para obter a figura 6.2.c, sofreu um processo de depuração numérica, onde testou-se a formulação nas variáveis  $U$  e  $rV$  com interpolação via Lei da Potência e Upwind. Tais resultados são apresentados na figura 6.3.

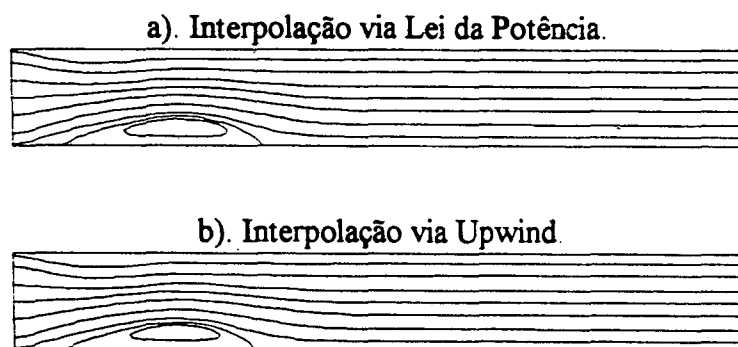


Figura 6.3 - Configuração de escoamento obtida com formulação em  $U$  e  $rV$  para  $Re=100$ .

Os escoamentos apresentam-se de forma assimétrica diferentemente de todos os outros casos disponíveis na literatura até o momento. Em princípio este é um resultado muito interessante, pois com este modelo consegue-se captar um ponto de bifurcação entre as soluções simétrica e assimétrica bem abaixo daquele obtido por Langer (1991). Infelizmente constatou-se que este resultado é decorrente da forma com que a interpolação via Lei da Potência é implementada. Observando-se a eq. (6.8), que rege a conservação da quantidade de movimento na direção radial da formulação em  $rV$ , nota-se que existe um termo de inércia  $(V_r/r)^2$  de grandeza significativa e que não foi considerado pela equação de interpolação na direção radial. Neste número de Reynolds ( $Re=100$ ) os termos de inércia são significativos e, portanto, deveriam ser incluídos na equação da interpolação ( $\partial J/\partial r = 0$ ) definida pela Lei da Potência. Conforme observado na figura 6.3.b, o uso da interpolação Upwind, onde as variáveis nas faces dos volumes de controle possuem o valor correspondente ao ponto nodal a montante, fornece resultado idêntico ao da interpolação via Lei da Potência. Para este valor do número de Reynolds este é um resultado esperado pois em quase todos os volumes de controle do domínio de solução a interpolação via Lei da Potência recai, automaticamente, em um esquema Upwind.

Da figura 6.3 conclui-se que a partir de valores moderados de número de Reynolds, como é o caso, não se pode desprezar um termo de inércia na equação de interpolação, sob pena de incorrer em inconsistência numérica na equação completa. A forma mais conveniente de se considerar o termo de inércia é incorporá-lo como termo fonte da equação de interpolação. Tal procedimento foi sugerido por Henou et alli (1989) e testado com sucesso no difusor radial com alimentação axial por Gasche (1992). Por outro lado as interpolações baseadas em esquemas mais precisos, como QUICK e MSOU não sofrem deste problema. Alternativamente poder-se-ia adotar a função de interpolação completa, onde todos os termos da equação de Navier-Stokes são considerados (Souza, 1992a e 1992b).

A seguir apresentam-se na figura 6.4 alguns exemplos de escoamentos simétricos no difusor radial obtidos com o Modelo 3.

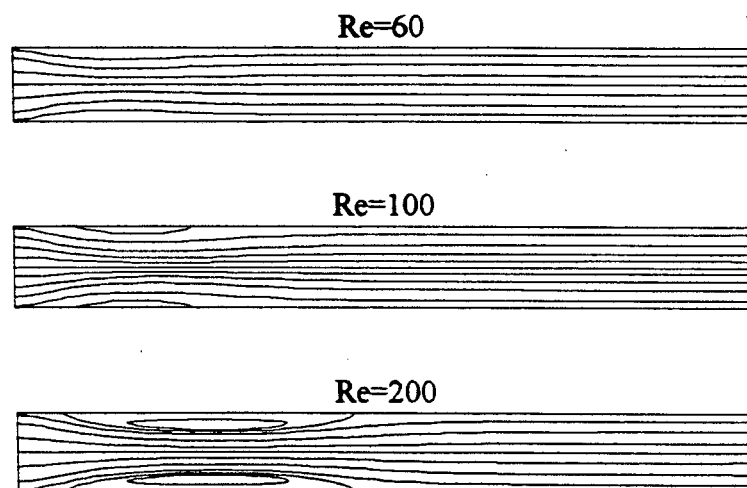


Figura 6.4 - Escoamentos simétricos em difusor radial com alimentação radial; formulação  $U$  e  $rV$  e interpolação QUICK consistente (Modelo 3).



Nesta faixa moderada de números de Reynolds não se constatou alteração em relação aos resultados apresentados por Langer (1991). O número de Reynolds crítico que define o limite de estabilidade do escoamento simétrico continua acima de  $Re=100$ . Este resultado é confirmado também pelo Modelo 2 com formulação em U e V. Um estudo mais detalhado sobre o número de Reynolds crítico será apresentado mais adiante através de análise da estabilidade linear.

Na sequência apresentam-se nas figuras 6.5 e 6.6 configurações de escoamentos assimétricos obtidos com os Modelos 2 e 3, respectivamente. Tais soluções assimétricas são obtidas naturalmente, apenas os efeitos de arredondamento numérico presentes nas equações discretizadas são suficientes para induzir o escoamento simétrico a uma nova configuração.

Os escoamentos assimétricos apresentados nas figuras 6.5 e 6.6 possuem excelente concordância com aqueles obtidos por Langer (1991) através do Modelo 0, até a faixa de  $Re=600$ . No presente trabalho as bolsas de recirculação são apenas um pouco maiores que as obtidas por Langer. Para  $Re=1000$  observa-se que a grande bolsa de recirculação existente até  $Re=600$ , se quebra, liberando vórtices que caminham na direção do escoamento, caracterizando um escoamento de comportamento não estacionário. Ambos os Modelos, 2 e 3, captam escoamentos com oscilações nas velocidades, gerando vórtices sucessivos a partir da bolsa de recirculação principal para  $Re=1000$ . Exemplos localizados deste comportamento oscilatório são mostrados na figura 6.7 para algumas componentes de velocidade transversal ao escoamento, situadas na linha de simetria do difusor; o ponto 1 está na posição  $r=5$ , o ponto 2 está em  $r=14$ .

O comportamento esperado para  $Re=1000$  era o de um escoamento transiente periódico bem definido. No entanto, não foi possível identificar um período de oscilação no campo de velocidades obtido numericamente. Apenas o comportamento da componente de velocidade em algumas regiões do escoamento, como por exemplo o ponto 1, seguiu um padrão de oscilações periódicas. Deve-se notar que o ponto 1 está situado na região superior da camada cisalhante, exatamente onde ocorrem as chamadas "oscilações da camada cisalhante". Neste ponto é possível identificar um comportamento periódico das velocidades, com um período bem definido em torno de  $\Omega=2.2$ , muito embora a amplitude de oscilação seja bastante baixa. O ponto 2 está situado entre os vórtices que são ejetados e carregados pelo escoamento. Neste ponto não foi possível identificar um padrão periódico de escoamento, embora nas figuras 6.5 e 6.6 seja possível identificar uma sequência organizada de ejeções de vórtices.

Normalmente, em uma bifurcação entre escoamento estacionário e escoamento transiente, aparece primeiro um padrão de escoamento periódico. O padrão aperiódico deveria aparecer em um valor do número de Reynolds bem acima do valor de transição. No presente estudo encontrou-se um valor de transição  $Re_2$ , em torno de 850, conforme secção 6.3 a seguir. Portanto,  $Re=1000$  não é, em princípio, um valor alto. Há algumas hipóteses para tentar explicar este padrão aperiódico e a primeira é que o padrão periódico ocorra nas proximidades de  $Re_2$  e que  $Re=1000$  já seja suficientemente alto para gerar o padrão aperiódico.

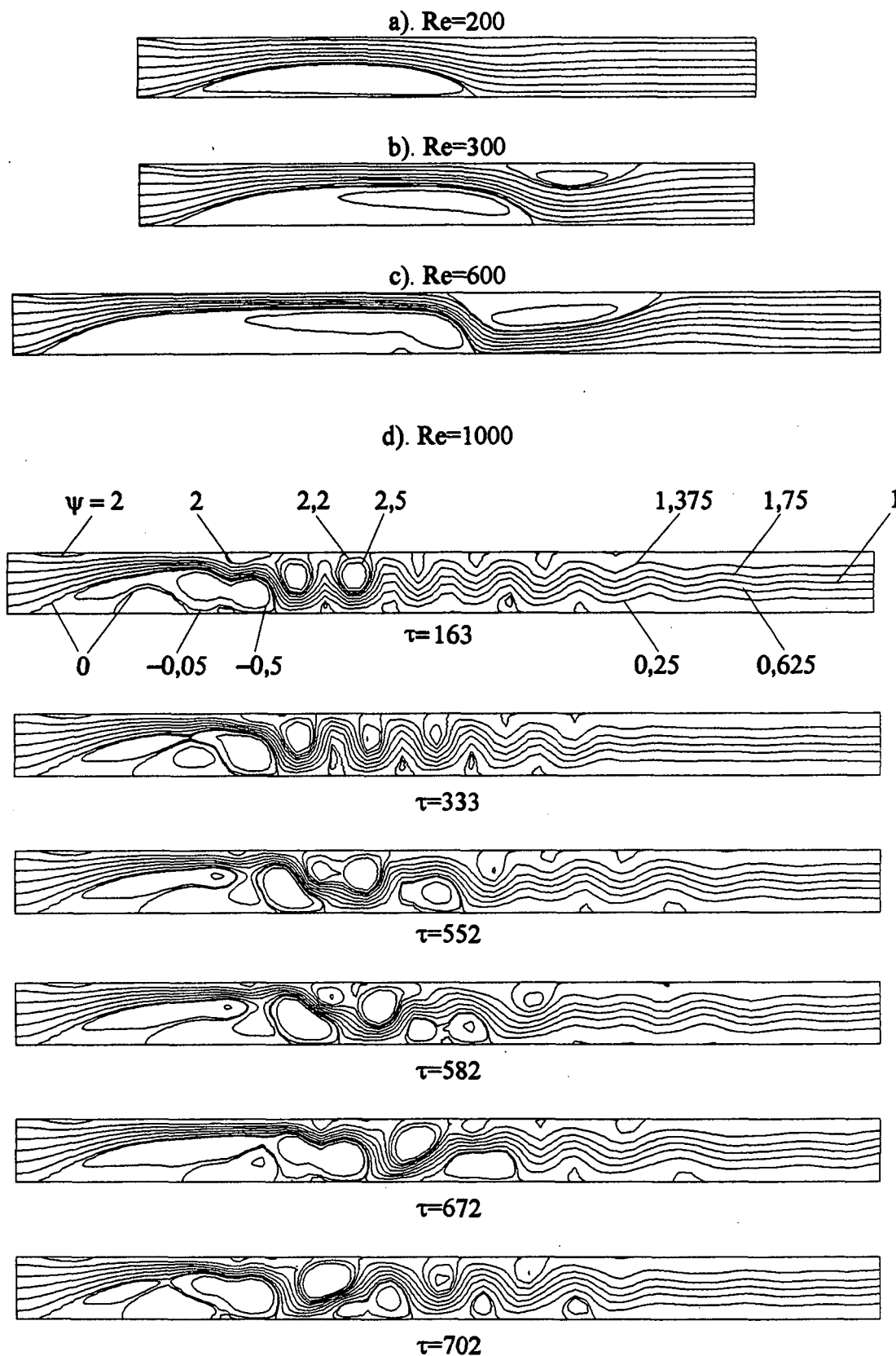


Figura 6.5 - Escoamentos assimétricos em difusor radial com alimentação radial obtidos com o Modelo 2 (malha colocalizada e interpolação QUICK consistente).

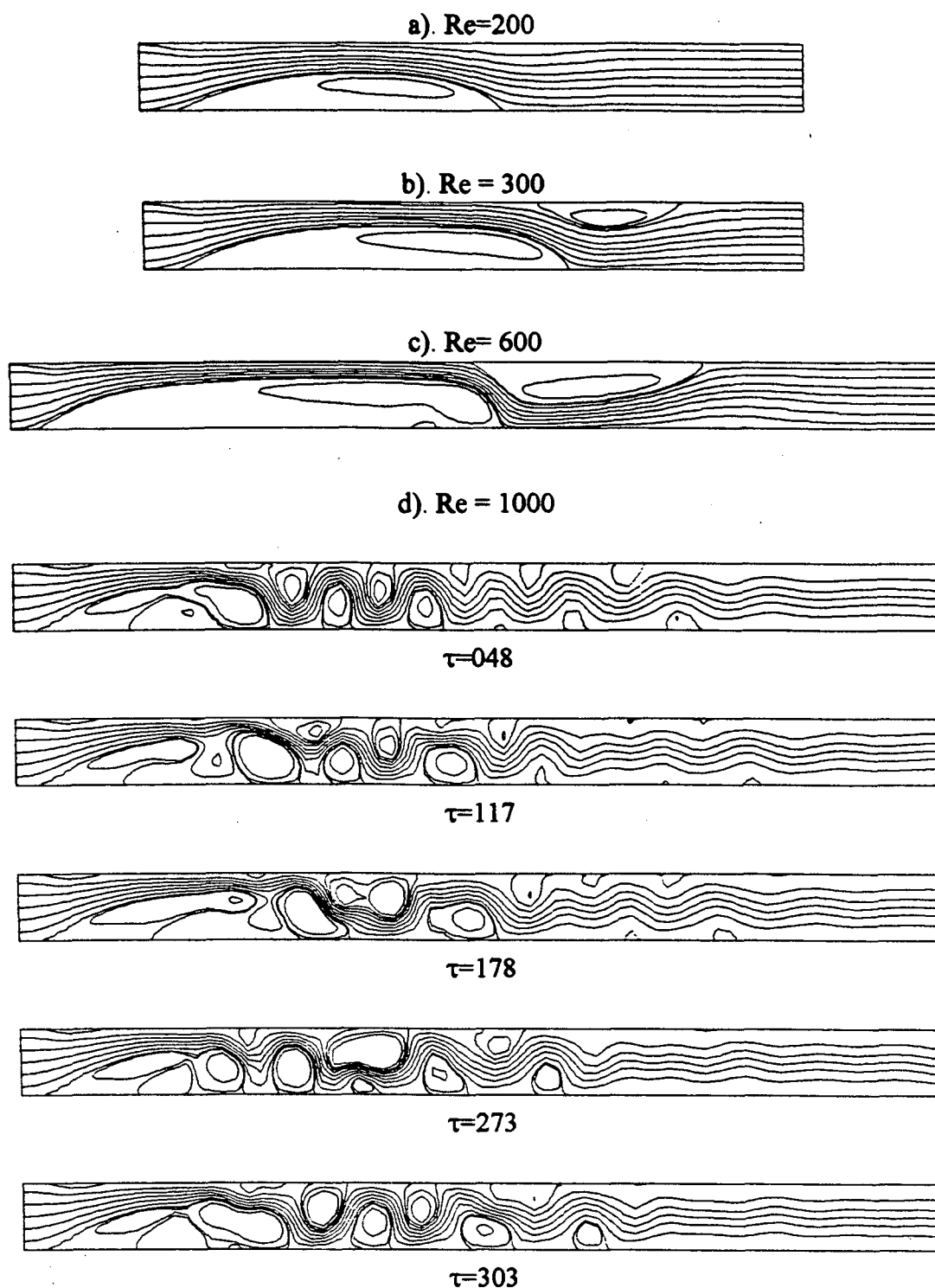


Figura 6.6 - Escoamentos assimétricos em difusor radial com alimentação radial obtidos com o Modelo 3 (malha colocalizada, formulação em  $U$  e  $rV$  e interpolação QUICK consistente).

A segunda hipótese para a não periodicidade do escoamento acima é que o processo de estabilização do esquema iterativo seja muito lento, pois parte-se de um campo de velocidades inicial estacionário para depois atingir o padrão oscilatório impondo uma grande perturbação. Esta

perturbação pode ainda estar apresentando seus efeitos, distorcendo o campo de velocidades. Uma terceira hipótese é que as oscilações sejam de origem não física e, neste caso, a metodologia de discretização numérica tem papel decisivo e necessita ser melhor investigada, o que será feito a seguir.

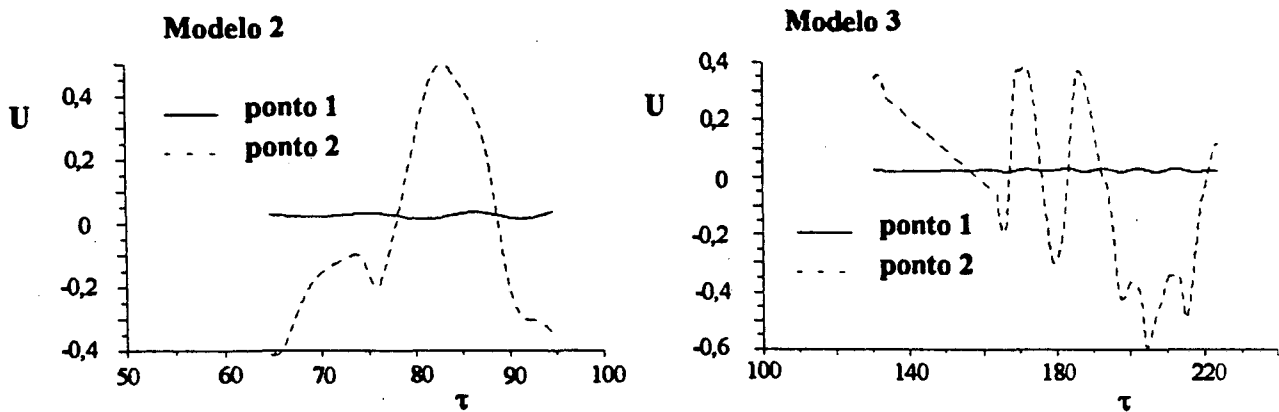


Figura 6.7 - Comportamento temporal de componentes de velocidade transversal ao escoamento radial para  $Re=1000$ .

Sabe-se da literatura numérica que o esquema de interpolação QUICK pode induzir oscilações numéricas. Segundo a revisão de esquemas de interpolação feita por Tamamidis e Assanis (1993), quanto mais precisa é a aproximação dada pela interpolação, maior é a possibilidade de oscilações numéricas. A ocorrência de oscilação no campo de velocidades é proporcional à menor dissipação induzida pelo termo truncado na série aproximadora do valor interpolado nas faces dos V.C. No esquema Upwind de primeira ordem (FOU - First Order Upwind) trunca-se um termo de primeira ordem ( $\partial U / \partial x$ ), que é considerado o mais dissipativo. No esquema Upwind de segunda ordem (SOU - Second Order Upwind) trunca-se um termo de segunda ordem ( $\partial^2 U / \partial x^2$ ), que é menos dissipativo que o termo truncado em FOU. Já no esquema QUICK trunca-se um termo de terceira ordem ( $\partial^3 U / \partial x^3$ ), que é o menos dissipativo dos três apresentados. Portanto, com o esquema QUICK tem-se a melhor precisão na aproximação do valor interpolado nas faces, mas tem-se o menor efeito dissipativo. Conseqüentemente tem-se um esquema de interpolação potencialmente oscilatório, podendo ocorrer oscilações não físicas.

As oscilações aperiódicas do escoamento podem também estar associadas à discretização em malha colocizada, onde o termo transiente sofre um efeito de médias com os valores dos vizinhos que pode estar alterando a sequência transiente natural do escoamento (vide Apêndice D). Assim, na sequência, reavalia-se o escoamento no difusor radial com alimentação radial através do modelo 4, onde tem-se uma discretização em malha desencontrada e interpolação QUICK consistente. Com este resultado pode-se validar o esquema colocizado adotado. Os resultados desta modelação são apresentados na figura 6.8, onde avalia-se a componente de

velocidade transversal ao escoamento na linha de simetria, nos pontos 1, 2 e 3, localizados em  $r=5$ , 14 e 20, respectivamente.

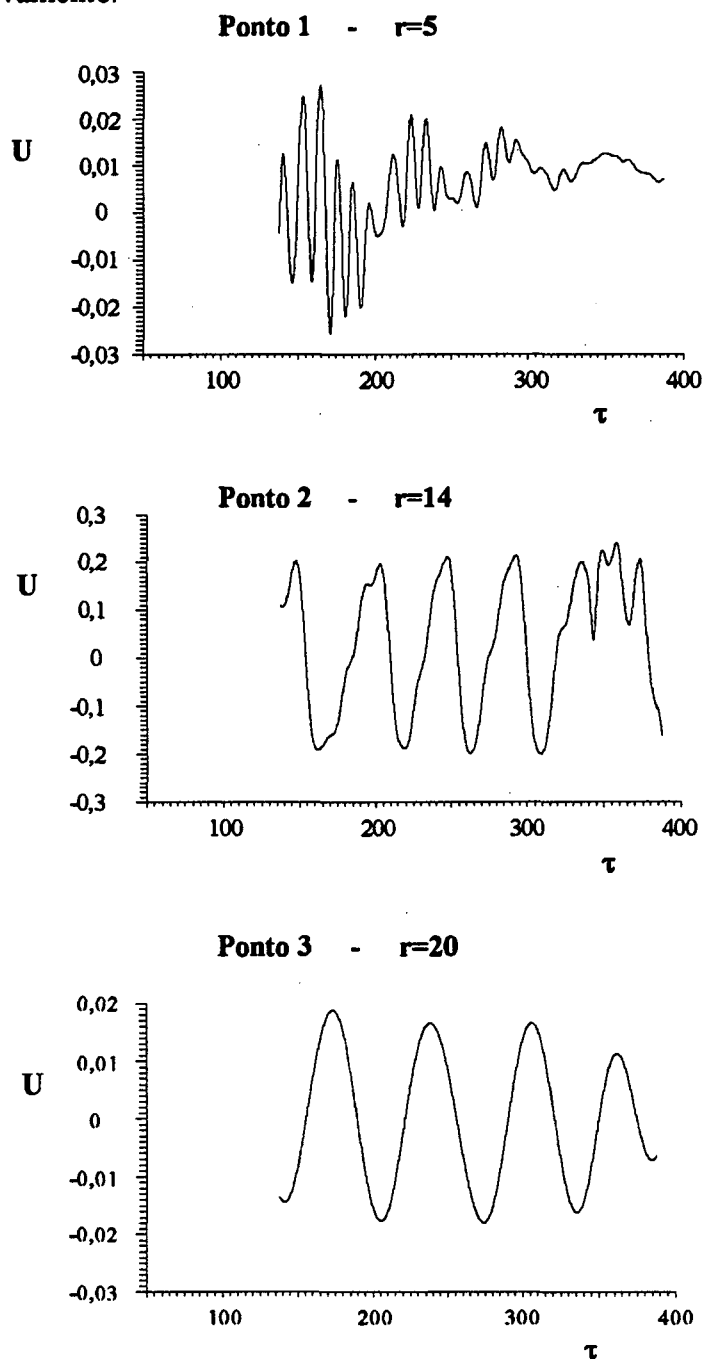


Figura 6.8 - Comportamento temporal de componentes de velocidades transversais para  $Re=1000$  (Modelo 4).

O comportamento das componentes de velocidade é tão desorganizado com o Modelo 4 (desencontrado), quanto com o Modelo 2 (colocalizado). O padrão do escoamento ainda é aperiódico, eliminando-se assim a dúvida que havia quanto à validade do esquema colocalizado proposto por Majumdar (1988) para resolução de escoamentos não estacionários.

Apresenta-se na figura 6.9 alguns padrões do escoamento para  $Re=1000$ , obtidos com o Modelo 4.

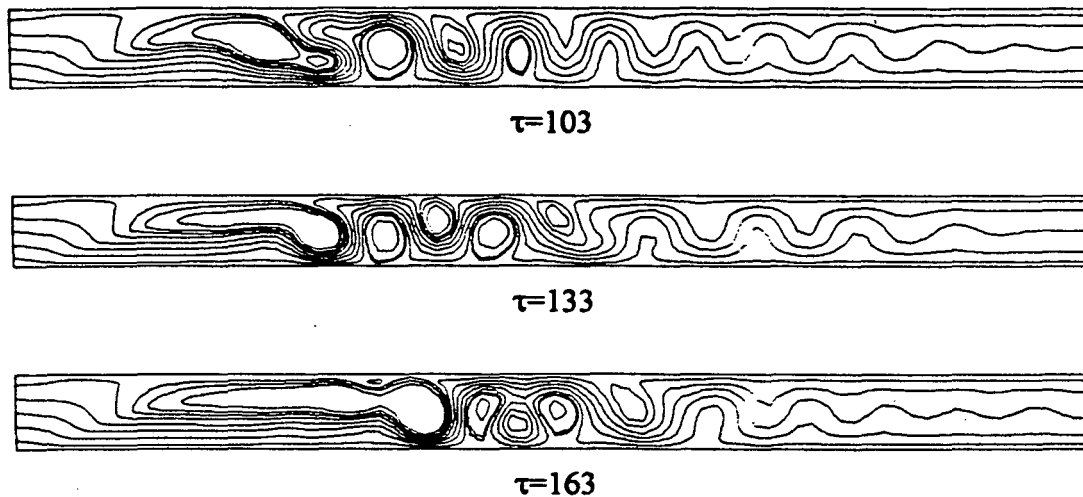


Figura 6.9 - Escoamento para  $Re=1000$  no difusor radial com alimentação radial obtido com o Modelo 4 (malha desencontrada e interpolação QUICK consistente).

O padrão de escoamento obtido com o Modelo 4 (desencontrado e QUICK) é semelhante ao padrão obtido com o Modelo 2 (colocalizado e QUICK). Em ambos ocorre uma espécie de flambagem do escoamento, provavelmente devida ao gradiente adverso de pressão existente na direção radial. Neste padrão também ocorrem as ejeções sucessivas de vórtices, que são arrastadas pelo escoamento e se amortecem gradativamente até a saída do difusor. Com esta comparação ficam qualitativamente validados os modelos colocalizados para a resolução de problemas não estacionários.

A seguir o mesmo escoamento explorado anteriormente será resolvido pelo esquema MSOU ("Monotonic Second Order Upwind"), que é considerado um esquema ENO ("Essentially Non-Oscillatory"). Neste procedimento deve-se ter uma discretização livre de oscilações numéricas, pois trata-se de um esquema de interpolação monotônico onde o valor interpolado jamais vai ultrapassar os valores vizinhos à montante e à jusante.

Aplicando-se o esquema MSOU, através do Modelo 5, tem-se os comportamentos das componentes de velocidade transversal nos pontos 1, 2 e 3, conforme mostrados na figura 6.10.

As oscilações geradas com o Modelo 5 continuam sendo aperiódicas, conforme observado na figura 6.10. Portanto, mesmo usando-se um esquema considerado essencialmente não oscilatório, ou seja, livre de oscilações não físicas, obtiveram-se os mesmos resultados aperiódicos obtidos com os modelos anteriormente empregados com interpolação QUICK.

O padrão aperiódico do escoamento obtido com o Modelo 5, conforme figura 6.11 a seguir, é análogo aos padrões gerados com os modelos anteriores. Todos os modelos, testados no presente trabalho, geram um escoamento com ejeções sucessivas de vórtices, que são arrastados ao longo da direção radial indo amortecer na saída do difusor. Não se pode garantir que o padrão

de escoamento apresentado está livre de oscilações espúrias. Foram testadas diversas metodologias de discretização numérica e no entanto todas geraram o mesmo resultado oscilatório aperiódico.

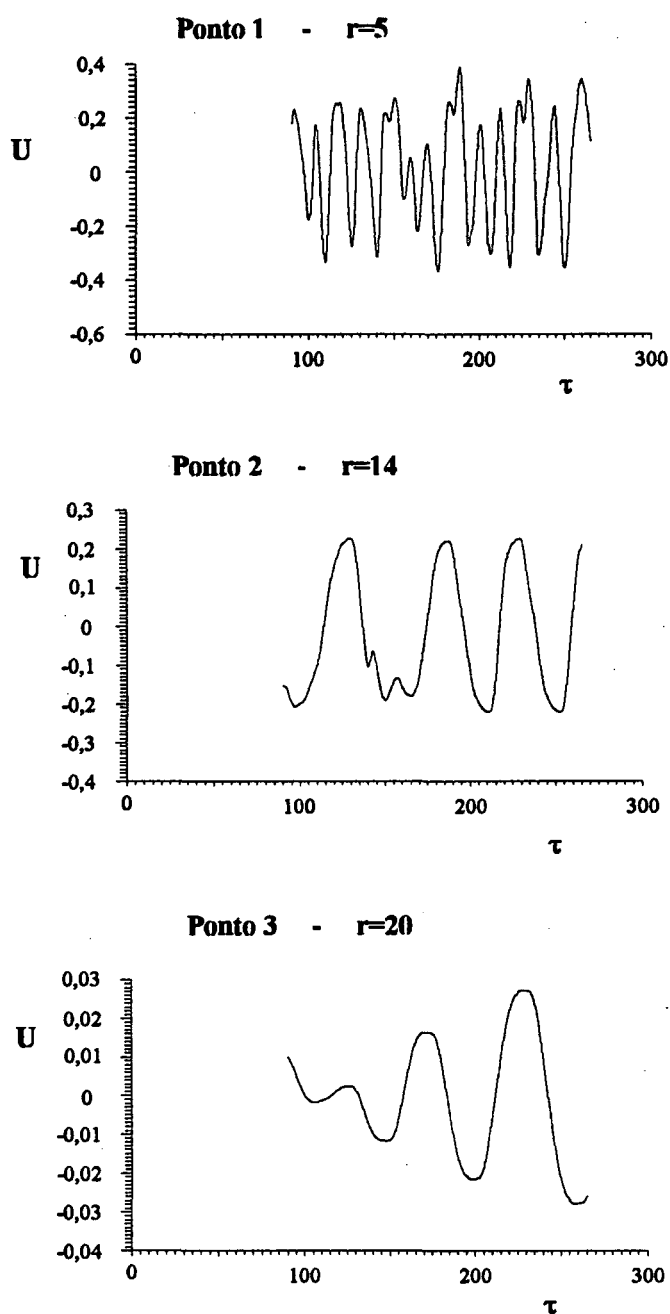


Figura 6.10 - Comportamento temporal de componentes de velocidades transversais para  $Re=1000$  (Modelo 5).

A priori, pode-se concluir que as oscilações auto-geradas e auto-mantidas pelo próprio escoamento radial são mesmo de origem física, caracterizando um padrão transiente aperiódico, visto que o Modelo 5 é considerado livre de oscilações numéricas. Nota-se que as oscilações são

mais intensas na região de entrada do difusor, tanto em frequência quanto em amplitude, e vão diminuindo gradativamente na direção radial. Naturalmente se fosse possível identificar um período de oscilações, certamente este período seria uma função decrescente da posição radial no interior do difusor.

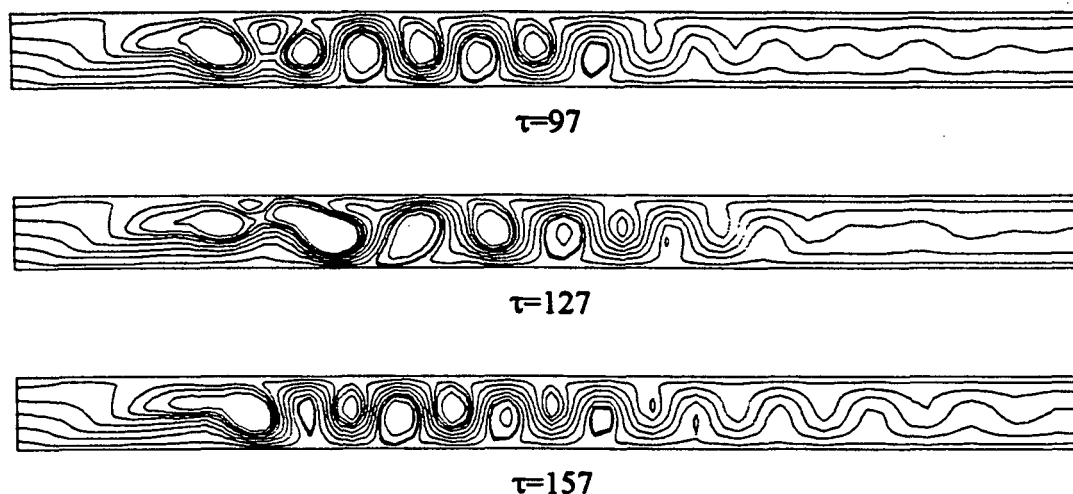


Figura 6.11 - Escoamento para  $Re=1000$  no difusor radial com alimentação radial obtido com o Modelo 5 (malha desencontrada e interpolação MSOU).

Um outro fato a ser salientado é que o escoamento a  $Re=1000$  não apresenta característica estacionária mesmo quando modelado pelo esquema desencontrado com interpolação via Lei da potência (Modelo 0), conforme os próprios resultados obtidos por Langer (1991), onde a convergência plena não era atingida. Ainda que se usasse um processo de convergência em regime transiente distorcido, com altos valores de subrelaxação, o escoamento não convergia plenamente (resíduo da equação da massa não tende a zero), ou seja, insistia em não ser estacionário. No caso do esquema colocalizado com interpolação via Lei da Potência, Modelo 1 avaliado no presente trabalho, foi necessário o uso de relaxações mais fortes ainda, e mesmo assim não se consegue obter o regime estacionário com resíduo nulo da equação de conservação da massa. Atribui-se esta maior dificuldade de convergência no presente trabalho à utilização de uma malha mais refinada do que aquela adotada por Langer (1991). Com o Modelo 1 e malha mais refinada que a de Langer (1991) é possível captar oscilações de baixíssima amplitude na região de camada cisalhante, o que reforça a tendência a um escoamento transiente.

Com as interpolações via QUICK consistente e MSOU, capta-se um regime claramente não-estacionário. As bolsas de recirculação se desprendem sucessivamente a partir da entrada do difusor e deslizam junto às paredes até desaparecerem próximo à saída do difusor. Ocorreu assim um regime transiente onde as bolsas de recirculação deslizam pelas paredes ao longo da direção radial e se contraem gradativamente até desaparecerem numa região predominantemente viscosa. Esta é a versão de Mochizuki e Yang (1985) para escoamentos radiais transientes.



Cabe lembrar que o escoamento transiente a  $Re=1000$  surge naturalmente durante o avanço temporal da solução numérica. Partindo-se de um campo de velocidades simétrico, atinge-se primeiramente um padrão simétrico, mas não com uma convergência satisfatória, ou seja, com resíduo da equação de conservação de massa relativamente grande. Depois o escoamento passa por um padrão assimétrico, também sem uma convergência plena, e então surge um padrão oscilatório. Para acelerar este processo de convergência perturba-se o escoamento logo no campo inicial e, assim, chega-se diretamente ao padrão oscilatório.

Assim, para escoamentos a  $Re=1000$  tem-se padrões não-estacionários, obtidos com o modelo 2, 3, 4 ou 5 indiferentemente, onde Langer (1991) havia obtido um padrão assimétrico estacionário. Este novo padrão de escoamento indica a existência de um ponto de bifurcação abaixo de  $Re=1000$ , que será mais precisamente determinado através das equações das pequenas perturbações, conforme explorado na secção subsequente.

Os escoamentos apresentados neste capítulo foram obtidos supondo-se a sua axissimetria. Assim, simulou-se o escoamento radial através de uma formulação bidimensional, que necessita, naturalmente, de uma confirmação através de formulação tridimensional. Neste sentido implementou-se o Modelo 2, em um escoamento radial **tridimensional**. A maior malha testada com o Modelo 2 tridimensional foi de  $14 \times 57 \times 30$  pontos, respectivamente, na direção angular, radial e axial. Tal malha equivale a 23940 pontos e é muito maior que a maior malha bidimensional utilizada de  $60 \times 135$  pontos, equivalente a 8100 pontos para  $Re=1000$ . No entanto, esta malha tridimensional testada é ainda muito grosseira, pois se conseguiu captar apenas o escoamento assimétrico estacionário obtido por Langer (1991), com recirculações de dimensão inferior, que é um resultado compatível com malha mais grosseiras utilizada. A metodologia tridimensional empregada nestes testes apresentou resultado equivalente à metodologia bidimensional com malha de  $30 \times 57$  pontos (em  $x$  e  $r$ , respectivamente). Conclui-se que para se tentar obter algum escoamento tridimensional novo, ou mesmo equivalente ao bidimensional apresentado anteriormente, seria necessária uma malha muito mais refinada, o que exigiria uma memória e tempo de CPU impraticáveis para os computadores disponíveis (IBM 3090 e CONVEX 210).

### **6.3- RESULTADOS OBTIDOS COM A TEORIA LINEAR DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA**

Oliveira (1992) estudou o difusor radial à luz da Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica e constatou que os padrões de escoamentos simétricos passam por uma bifurcação a um valor de número de Reynolds crítico condizente com os resultados obtidos por Langer (1991). O primeiro número de Reynolds crítico obtido foi em torno de 115, exatamente o mesmo de Langer. Este primeiro valor determina o limite da estabilidade do escoamento simétrico ( $Re_L$  segundo nomenclatura adotada na figura 3.1). A partir deste valor basta uma perturbação infinitesimal para

que o escoamento simétrico desestabilize e se torne assimétrico. Oliveira estudou também a estabilidade de alguns casos de escoamentos assimétricos e determinou um segundo ponto de bifurcação em torno de um número de Reynolds igual a 300. Esta segunda bifurcação não foi captada por Langer, que continuou obtendo escoamentos assimétricos estacionários acima de  $Re=300$ . Oliveira (1992) obteve seus resultados baseados na Teoria Espectral da Estabilidade Hidrodinâmica (Joseph, 1976), resolvendo as equações diferenciais através do método dos volumes finitos, com malha desencontrada e interpolação nas faces através da Lei da Potência. A mesma malha utilizada por Langer (1991) foi adotada por Oliveira (1992).

No presente trabalho, buscaram-se explicações para algumas destas questões através de metodologias numéricas alternativas que possam captar melhor o problema físico. Para avaliar a estabilidade hidrodinâmica do escoamento radial foram utilizadas as equações das pequenas perturbações, conforme a Teoria Linear proposta no capítulo 3, analogamente aos estudos feitos na expansão plana e no prisma quadrado (vide capítulo 5). Tais equações foram resolvidas pelo esquema de interpolação QUICK consistente, sobre uma discretização em malha colocada e desencontrada, análogas respectivamente aos Modelos 2 e 4, aplicados às equações de Navier-Stokes.

As equações governantes para as perturbações  $u$  e  $v$ , associadas ao escoamento no difusor radial são,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rU_b u)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_b u)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] - u \frac{\partial U_b}{\partial x} - v \frac{\partial U_b}{\partial r} \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rU_b v)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_b v)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] - u \frac{\partial U_b}{\partial x} - v \frac{\partial V_b}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{v}{r^2} \quad (6.12)$$

As adimensionalizações adotadas nas equações anteriores foram,

$$u = u^*/\bar{V} \quad , \quad v = v^*/\bar{V} \quad , \quad p = p^*/\rho \bar{V}^2 \quad , \quad U_b = U_b^*/\bar{V} \quad , \quad V_b = V_b^*/\bar{V} \\ x = x^*/r_1 \quad , \quad r = r^*/r_1 \quad , \quad \tau = \bar{V}t/r_1 \quad (6.13)$$

$$Re = \rho \bar{V} r_1 / \mu$$

onde  $\bar{V}$  é a velocidade média na posição radial  $r = r_1$ .

As condições de contorno associadas ao problema das pequenas perturbações são,

$r = r_0$	$u = v = 0$ (perturbação nula na entrada)
$r = r_2$	$\partial^2 u / \partial r^2 = \partial^2 (rv) / \partial r^2 = 0$
$x=0$ e $r < r_1$ $x=S$ e $r < r_1$	$u=0$ e $\partial v / \partial x = 0$
$x=0$ e $r < r_1$ $x=S$ e $r < r_1$	$u=v=0$

(6.14)

A condição inicial de perturbação aplicada ao difusor radial com alimentação radial foi  $u(x, \tau = 0) = 10^{-6}$  para  $0 < x < 1$ , ou seja, metade do difusor sofreu uma perturbação inicial uniforme e a outra metade permaneceu inalterada. Esta é a condição inicial utilizada em  $\tau=0$ , apesar deste campo não satisfazer a equação da conservação da massa. Após um intervalo de tempo  $\Delta\tau = 1$  gera-se um campo de perturbações assimétrico e que agora satisfaz a conservação da massa. É a partir deste novo campo de perturbações que se registra a evolução temporal das perturbações, mas continua-se com o mesmo procedimento numérico satisfazendo aos mesmos critérios de convergência pré-estabelecidos para o intervalo inicial de tempo anterior a  $\Delta\tau = 1$ .

Resolvidas as equações das pequenas perturbações, pode-se avaliar o autovalor mais instável  $\beta$  através das equações adequadas a cada faixa de número de Reynolds, conforme explorado no capítulo 5.

A seguir apresentam-se os autovalores  $\beta$  mais instáveis, que medem o grau de instabilidade dos padrões simétricos e assimétricos do escoamento no difusor radial. Nas soluções numéricas das equações adotou-se um modelo equivalente ao 2, aplicado às perturbações. Os valores de  $\beta$  foram calculados de forma análoga àquela adotada na secção 5.2 para a expansão plana. Para valores de Reynolds até 200, a avaliação de  $\beta$  é feita através da eq. (3.19), válida para comportamento monotónico das perturbações. Esta avaliação foi utilizada por Oliveira (1992) e é restrita a perturbações com comportamento monotónico. Para valores de Reynolds acima de 200, começam a ocorrer oscilações gradativas no valor da energia média das perturbações, de modo que a eq. (3.19) não é mais adequada para se calcular  $\beta$ . Neste caso utilizou-se a eq. (5.9) para cálculo de perturbações oscilatórias, de forma análoga ao prisma quadrado.

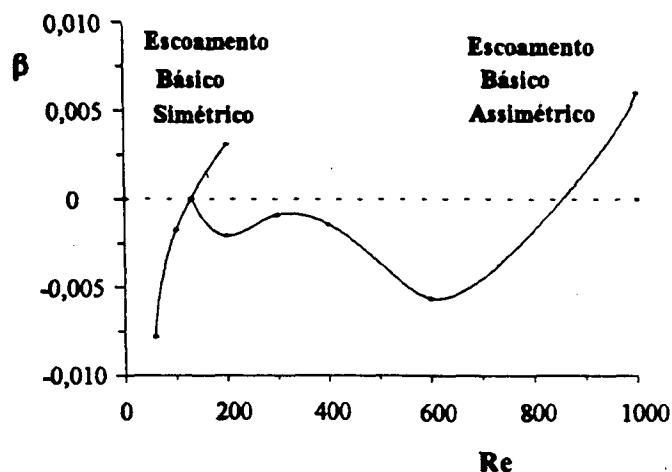


Figura 6.12 - Autovalores mais instáveis para escoamento radial com alimentação radial, obtido com Modelo 2 (interpolação QUICK consistente em malha colocizada).

Na figura 6.12 observam-se dois pontos de bifurcação. O primeiro surge para um número de Reynolds em torno de 120, que é compatível com os resultados de Langer e Oliveira, haja visto que nesta faixa de número de Reynolds as metodologias aplicadas no presente trabalho e nos trabalhos de Langer e Oliveira são equivalentes, diferindo apenas pela malha utilizada. O segundo ponto de bifurcação surge para um número de Reynolds em torno de 850 e define a transição entre o padrão assimétrico estacionário e um padrão transiente, que foi captado com diversas metodologias de solução e para  $Re=1000$  foi apresentado em várias figuras, tais como figura 6.5, 6.6, 6.9 e 6.11. As perturbações para  $Re=600$  e  $Re=1000$  evoluíram de modo oscilatório bem definido e é interessante lembrar no presente momento uma constatação feita anteriormente no capítulo 5, onde perturbações oscilatórias indicaram a transição para um escoamento de padrão também oscilatório.

Oliveira (1992) detectou um segundo ponto de bifurcação a partir dos padrões assimétricos de Langer em torno de  $Re=300$ . Tal resultado difere muito do valor obtido no presente trabalho ( $Re=850$ ), provavelmente porque a metodologia empregada só valia para perturbações com comportamento monotônico. Presentemente verificou-se que perturbações a partir de  $Re=200$  são oscilatórias.

O estudo da estabilidade linear foi realizado com um modelo em malha colocizada com interpolação QUICK consistente, equivalente ao Modelo 2 apresentado no capítulo 4. Para validar esta metodologia colocizada a regimes transientes, como é o caso da equação das pequenas perturbações, implementou-se uma discretização destas equações em uma malha desencontrada mantendo-se a interpolação QUICK consistente, analogamente ao Modelo 4 apresentado no capítulo 4.

A seguir apresentam-se comportamentos temporais de algumas perturbações para  $Re=600$  e 1000 obtidos pelo modelo 4 aplicado à equação das perturbações. Mais especificamente, apresenta-se a variação das componentes  $u$ ,  $v$  e  $\beta$  com o tempo para o ponto 2 da figura 6.1. O

valor de  $\beta$  foi avaliado pela equação (3.19), analogamente aos resultados apresentados nas figuras 5.10-14, sabe-se que esta equação só é válida para perturbações de comportamento monotônico.

Observa-se das figuras 6.13 e 6.14 que o comportamento transiente das perturbações  $u$  e  $v$ , avaliadas localmente no ponto 2 é periódico. Na equação de Navier-Stokes não se conseguiu identificar esta periodicidade, o que provavelmente deve-se ao fato de que as equações das pequenas perturbações são lineares e, por isso, são bem comportadas. É interessante lembrar que no capítulo 5, no escoamento sobre prisma quadrado, observaram-se perturbações periódicas no caso da transição para um escoamento periódico. Naquele caso o período observado na oscilação das perturbações era compatível com o período de oscilação do escoamento completo. Portanto, pode-se ter uma idéia preliminar do período de oscilação do escoamento através das perturbações.

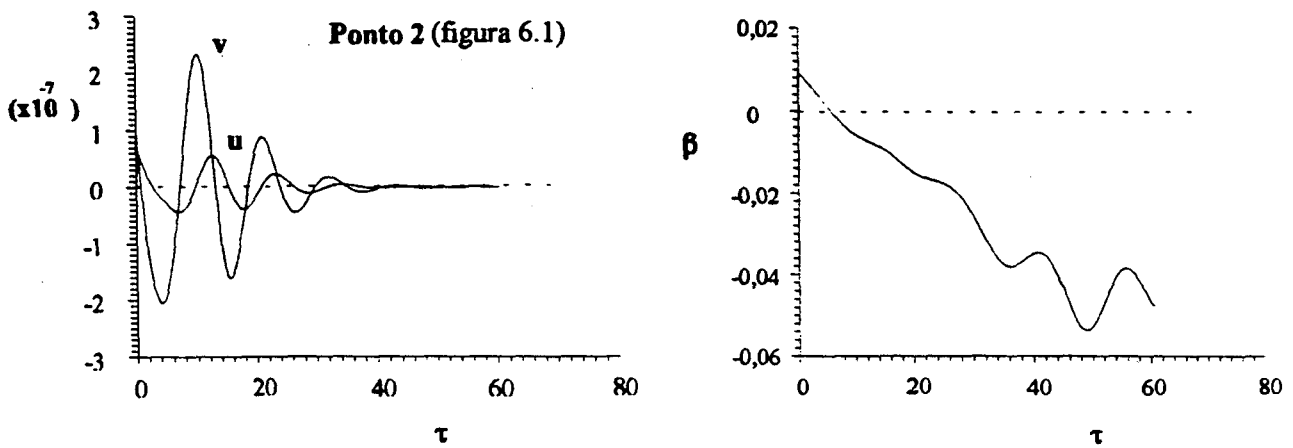


Figura 6.13 - Comportamentos temporais das perturbações  $u$  e  $v$  e do autovalor  $\beta$  para o escoamento radial com alimentação radial,  $Re=600$  (Modelo 4).

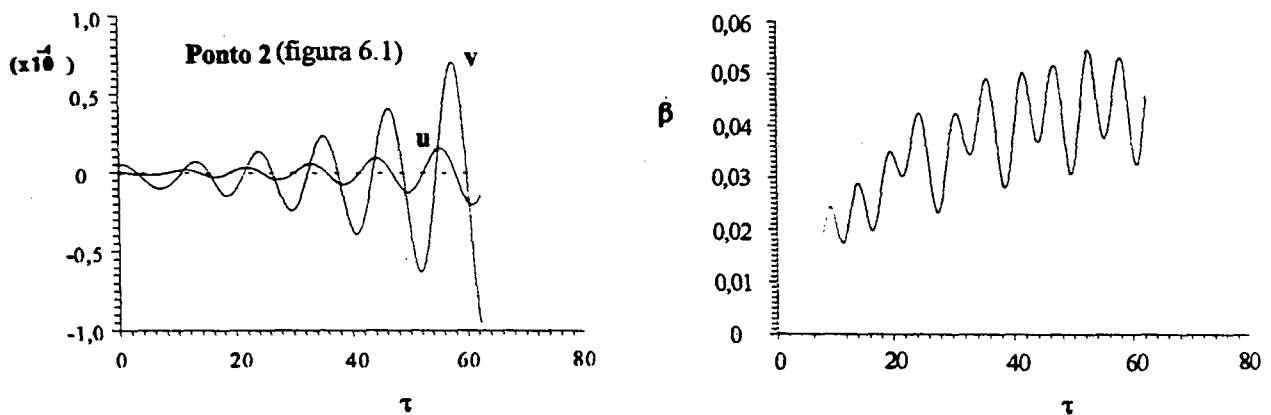


Figura 6.14 - Comportamentos temporais das perturbações  $u$  e  $v$  e do autovalor  $\beta$  para o escoamento radial com alimentação radial,  $Re=1000$  (Modelo 4).

Nas figuras 6.13 e 6.14 observa-se também um comportamento oscilatório do autovalor  $\beta$  (segundo a eq. (3.19)) em torno de um valor médio diferente de zero. Tal média representa com

boa precisão o autovalor mais instável representativo do escoamento. Ou seja, se o autovalor  $\beta$  for calculado pela eq. (5.9), baseada nos picos de perturbações, será obtido um valor equivalente ao valor médio citado. Nota-se na figura 6.13, correspondente a  $Re=600$ , uma média em torno de  $-0,045$  e na figura 6.14, para  $Re=1000$ , tem-se uma média em torno de  $+0,046$ , que são os valores calculados pela eq. (5.9), ou pela eq. (5.21).

Avaliando-se novamente os autovalores mais instáveis em toda a faixa de número de Reynolds de interesse e, conseqüentemente, os pontos de bifurcação existentes, tem-se a curva apresentada na figura 6.15.

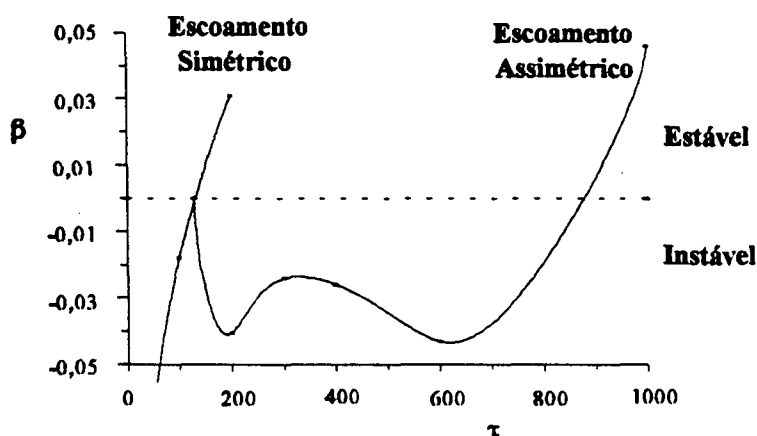


Figura 6.15 - Autovalores mais instáveis para o escoamento no difusor radial com alimentação radial, obtido com Modelo 4 (interpolação QUICK consistente em malha desencontrada).

Através das figuras 6.12 e 6.15 pode-se fazer uma avaliação clara da validade do modelo colocalizado em regimes transientes. Observa-se que os pontos de bifurcação não sofreram alteração significativa, muito embora os valores numéricos dos autovalores  $\beta$  obtidos com malha desencontrada (Figura 6.15) tenham sido quase dez vezes superiores em relação àqueles obtidos com malha colocalizada (Figura 6.12). Portanto, houve uma diferença quantitativa muito significativa entre os modelos em malha colocalizada e em malha desencontrada, pelo menos na resolução das equações das perturbações. Provavelmente esta diferença deve ser devida ao esquema de discretização da equação de Navier-Stokes, pois no caso da malha colocalizada faz-se uma média de equações discretizadas vizinhas para se obter o valor das componentes de velocidades correspondentes a cada face de volume de controle. Como esta média inclui o termo transiente, isto deve alterar a evolução das perturbações no tempo (vide Apêndice D). Qualitativamente obteve-se um resultado equivalente com os modelos 2 e 4, mas em princípio nada se pode garantir com respeito à aplicabilidade do esquema colocalizado a escoamentos em regimes transientes. O esquema em malha desencontrada parece ser mais adequado para esta aplicação em regimes transientes, afinal este esquema já foi consagrado em regimes transientes por inúmeras aplicações disponíveis na literatura.

Para encerrar o presente estudo do difusor radial com alimentação radial pretende-se reavaliar novamente o trabalho de Mochizuki e Yang (1985), através dos modelos com interpolação QUICK consistente. Mochizuki e Yang afirmam obter escoamentos transientes em uma faixa de número de Reynolds onde Langer não obteve sequer bolsa de recirculação, seja transitória ou estacionária.

#### 6.4 - ESTUDO DO DIFUSOR RADIAL DE MOCHIZUKI (1985)

No trabalho de Mochizuki e Yang (1985), apresentam-se escoamentos transientes em difusor radial com alimentação radial, obtidos numérica e experimentalmente. Mochizuki considera tais escoamentos como transientes a partir do momento em que ocorre a separação do escoamento junto à parede, formando um bolsa de recirculação. Este fato foi largamente contestado por Langer (1991), que apresentou vários exemplos de escoamentos com separação em regime estacionário, inclusive no difusor radial.

Mochizuki apresenta em seu trabalho um escoamento transiente com pequenas recirculações deslizando ao longo das duas paredes do difusor. Quando uma recirculação colapsava, imediatamente surgia uma outra na região de entrada do difusor. Tais recirculações são pequenas, bem inferiores às recirculações apresentadas para  $Re=100$ , na figura 6.2. Este resultado de Mochizuki e Yang (1985) é que gerou a sua afirmação de que toda recirculação é de caráter transitório. Esta afirmação já foi invalidada conforme discussão efetuada por Langer (1991).

Langer (1991) estudou este difusor radial com formulação em variáveis primitivas através da metodologia proposta por Patankar (1980), enquanto Mochizuki e Yang (1985) utilizaram a formulação em função corrente  $\psi$  e vorticidade  $\omega$ .

No presente trabalho também testou-se a formulação em termos de função corrente e vorticidade, análoga àquela empregada por Mochizuki e Yang, e nenhuma bolsa de recirculação, estacionária ou transiente, foi obtida para a geometria e o número de Reynolds analisado. Não se apresentam aqui as equações governantes para esta formulação aplicadas aos escoamentos radiais, por serem idênticas àquelas apresentadas por Mochizuki e Yang (1985). A metodologia de solução destas equações em termos de função corrente  $\psi$  e vorticidade  $\omega$  é baseada no algoritmo de Patankar (1980), onde se define um volume de controle contendo em seu centro  $\psi$  e  $\omega$ , e colocam-se as velocidades  $U$  e  $V$  nas suas faces, sendo que  $U$  e  $V$  são avaliadas através da função corrente  $\psi$ . As interpolações de  $\psi$  e  $\omega$  nas faces dos V.C. são feitas via Lei da Potência.

Além da formulação em termos de  $\psi$  e  $\omega$  resolveu-se ainda o problema proposto por Mochizuki e Yang (1985) através das variáveis primitivas com os Modelos 2 e 3 que se utilizam da interpolação via QUICK consistente. As equações são as mesmas apresentadas para o difusor

radial com alimentação radial, diferindo apenas as condições de contorno e os parâmetros geométricos.

O número de Reynolds definido por Mochizuki,  $Re_M$ , é dado por

$$Re_M = \left( \frac{\bar{V}r_1}{\nu} \right) \left( \frac{s}{d_1} \right)^2 \quad (6.15)$$

O caso testado no presente trabalho foi o escoamento a  $Re_M = 34$  e  $s/d_1 = 0,075$ , onde  $s$  é o espaçamento entre os discos e  $d_1$  é o diâmetro interno. Utiliza-se raio interno  $r_1 = 1$  e raio externo  $r_2 = 20$ . A malha utilizada nesta simulação foi de 62x92 pontos e é superior a empregada por Mochizuki. Tal escoamento é apresentado na figura 6.16,



Figura 6.16 - Escoamento radial equivalente ao de Mochizuki e Yang (1985) com  $Re_M = 34$  e  $s/d_1 = 0,075$ .

O campo de linhas de corrente apresentado na figura 6.16 foi obtido com o Modelo 3, mas é idêntico ao campo obtido com o Modelo 2 e, por isso apresentou-se apenas um dos resultados. Este campo é análogo àquele descrito por Langer (1991) e é virtualmente idêntico ao obtido no presente trabalho através da formulação em função corrente e vorticidade. Portanto, conclui-se que o escoamento obtido por Mochizuki e Yang (1985), no mínimo, não pode ser obtido pelas metodologias aqui apresentadas.



# ESCOAMENTO EM DIFUSOR RADIAL COM ALIMENTAÇÃO AXIAL

## 7.1 - INTRODUÇÃO

Os escoamentos radiais com alimentação radial, conforme trabalho de Langer (1991), apresentam instabilizações devidas ao gradiente adverso de pressão imposto pela expansão na área de passagem do fluido. Langer concluiu que tais gradientes foram responsáveis pelas bifurcações de escoamento encontradas. Os escoamentos radiais com alimentação axial, além do gradiente adverso de pressão, apresentam uma mudança brusca na direção do escoamento quando o fluido passa da região de entrada (orifício alimentador) para a região do difusor propriamente dito, vide Deschamps (1989), Todescat (1988) e Pilichi (1990), conforme esquema da figura 2.3. A alteração brusca na direção do escoamento é responsável por uma região de recirculação junto ao disco do difusor que contém o orifício alimentador. Esta região de separação inicia-se imediatamente após a quina entre o orifício e o disco e gera uma camada viscosa (camada cisalhante) de separação entre o fluido da corrente livre e aquele em recirculação.

Camadas cisalhantes tendem a ser instáveis e diversos são os trabalhos que exploram instabilidades associadas a existência de quinas no escoamento (por exemplo Sparrow e Kalejs, 1977).

Do exposto anteriormente verifica-se que oscilações geradas por quinas são de natureza instável. No entanto, quando o tamanho das recirculações induzidas pelas quinas é pequeno, as pequenas oscilações da camada viscosa tendem a ser amortecidas pelo escoamento e este mantém-se estável. Quando as recirculações são grandes, as oscilações tendem a ser amplificadas tornando o escoamento instável. Nestes casos as instabilidades são auto-geradas e auto-mantidas pelo próprio escoamento.

No presente capítulo busca-se explorar algumas questões intrigantes ligadas a difusores radiais com alimentação axial, onde se tem os dois efeitos instabilizantes citados anteriormente: o gradiente adverso de pressão e a camada cisalhante de separação associada a brusca mudança na direção do escoamento. A questão mais polêmica associada a estes difusores está registrada no trabalho de Pilichi (1990) (ver também Prata et alii, 1992 e 1993), onde existe uma discrepância entre valores do número de Nusselt local medidos experimentalmente e valores obtidos numericamente simulando-se um regime estacionário. Estas diferenças são sensíveis a partir de um determinado número de Reynolds,  $Re'$ , e crescem significativamente com este parâmetro. Uma curva típica do trabalho de Pilichi (1990) com uma distribuição radial do número de Nusselt local

foi apresentada na figura 2.5. Observe-se que a solução numérica consegue captar o primeiro pico observado no experimento, mas ignora a existência do segundo pico.

Uma das hipóteses para explicar estas diferenças é a possível característica instável da camada cisalhante, que só poderia ser captada com simulação em regime transiente. Esta hipótese está fundamentada na dificuldade de obtenção da solução estacionária para altos valores de  $Re'$ , pois Pilichi relata que foram necessárias relaxações fortíssimas para obterem-se soluções convergidas com  $Re'$  superiores a 2000. Para  $Re'=5041$  e  $s/d = 0,10$  (onde  $s$  é o afastamento entre os discos e  $d$  é o diâmetro do orifício alimentador do difusor) não foi possível obter a convergência da solução, mesmo usando-se relaxações mais fortes.

No presente trabalho propõem-se simulações numéricas deste problema em regime transiente. Espera-se captar uma camada cisalhante oscilatória, que por sua vez incrementaria o número de Nusselt local na região de saída do difusor.

## 7.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A exemplo do capítulo 6 continua-se supondo que existe uma simetria axial no escoamento, ou seja, que o escoamento seja axissimétrico, e estuda-se apenas um radiano ao longo da circunferência do difusor simulando um problema bidimensional. Para tal hipótese ser comprovada é necessária uma simulação tridimensional do problema que exige uma enorme demanda de memória e tempo de CPU. Tentou-se uma simulação 3D no capítulo 6, mas não se conseguiu obter uma nova conclusão definitiva por não ser possível executar uma malha suficientemente refinada. Neste contexto assume-se a hipótese de que o escoamento no difusor radial com alimentação axial também seja axissimétrico.

O domínio de solução a ser considerado para o problema do difusor radial com alimentação axial é apresentado na figura 7.1. Em virtude do espaçamento dos discos,  $s$ , ser muito pequeno comparado com o diâmetro do orifício alimentador  $d$ , o comprimento do orifício não é um parâmetro importante do problema, conforme demonstrado por Deschamps et alli (1989). Desta forma arbitra-se aqui tal dimensão como sendo igual a  $d$ .

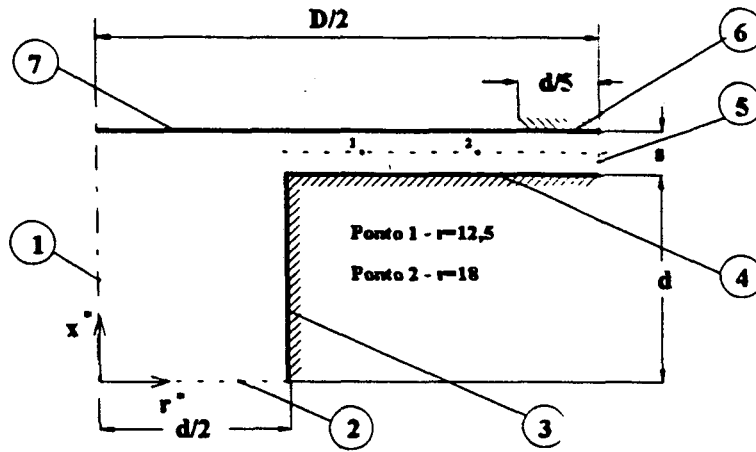


Figura 7.1 - Domínio de cálculo para simulação do escoamento em difusor radial com alimentação axial.

### 7.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

O problema é descrito pelas equações da continuidade, conservação de quantidade de movimento e energia, em regime transitório, com propriedades constantes. Tais equações na forma conservativa são escritas como,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rUU)}{\partial x} + \frac{\partial(rVU)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rUV)}{\partial x} + \frac{\partial(rVV)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{V}{r^2} \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rU\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(rV\theta)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r \text{Re Pr}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] \quad (7.4)$$

Ao escrever as equações anteriores as seguintes adimensionalizações foram adotadas,

$$U = U^*/U_e, \quad V = V^*/U_e, \quad P = P^*/\rho U_e^2, \quad \theta = (T - T_e)/(T_p - T_e)$$

$$x = x^*/s, \quad r = r^*/s, \quad \tau = U_e t/s \quad (7.5)$$

$$Re = U_e s/\nu \quad \text{e} \quad Pr = \nu/\alpha$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido,  $U_e$  e  $T_e$  são, respectivamente, a velocidade e a temperatura na entrada do orifício do difusor,  $T_p$  é a temperatura no disco frontal ao orifício e \* indica as variáveis dimensionais.

Nas equações anteriores,  $Pr$  é o número de Prandtl,  $Re$  é o número de Reynolds baseado na velocidade de entrada no orifício e no espaçamento  $s$  entre discos e  $Re'$  é o Reynolds definido no trabalho de Pilichi (1990) dado pela seguinte expressão,

$$Re' = U_e d/\nu = Red/s \quad (7.6)$$

As condições de contorno deste problema são apresentadas na tabela 7.1, conforme indexação mostrada na figura 7.1.

Tabela 7.1 - Condições de contorno adimensionalizadas, conforme figura 7.1.

Posição	Condição de Contorno
(1)	$V = \partial U / \partial r = \partial \theta / \partial r = 0$
(2)	$V = \theta = 0$ e $U = 1$
(3)	$U = V = \partial \theta / \partial r = 0$
(4)	$U = V = \partial \theta / \partial x = 0$
(5)	$\partial^2 U / \partial r^2 = \partial^2 V / \partial r^2 = \partial \theta / \partial r = 0$
(6)	$U = V = \partial \theta / \partial x = 0$
(7)	$U = V = 0$ e $\theta = 1$

A definição de número de Nusselt local utilizada por Pilichi (1990) em seu trabalho numérico é baseada na diferença entre a temperatura da parede quente  $T_p$  e temperatura do fluido na entrada do orifício  $T_e$ , ou seja,

$$Nu'(r) = q''s / k(T_p - T_e) \quad (7.7)$$

onde  $q''$  é o fluxo de calor transferido da palheta e  $k$  é a condutividade térmica do fluido.

Reescrevendo a equação (7.7) em termos das variáveis adimensionais tem-se,

$$Nu'(r) = \partial\theta/\partial x|_{x=0} \quad (7.8)$$

Alternativamente pode-se definir o número de Nusselt em termos da diferença entre a temperatura na parede e a temperatura de mistura  $T_m$ , que é uma função da posição radial.

Neste caso tem-se,

$$Nu(r) = q''s / k(T_p - T_m) \quad (7.9)$$

onde  $T_m$  é dado pela equação (7.10),

$$T_m(r) = \frac{1}{s\bar{V}(r)} \int_0^s V(x,r)T(x,r)dx \quad (7.10)$$

Reescrevendo a equação (7.9) em termos adimensionais, tem-se

$$Nu(r) = \frac{1}{(1-\theta_m)} \frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0} \quad (7.11)$$

Considerando que a temperatura do fluido no interior do difusor é muito próxima da temperatura deste na entrada do orifício alimentador,  $\theta_m \approx 0$ , as expressões (7.8) e (7.11) fornecem resultados que diferem no máximo em 10% na saída do difusor onde a temperatura de mistura  $T_m$  está mais diferenciada da temperatura  $T_e$ . Um exemplo desta diferença será mostrado na figura 7.3.

A região sólida do disco que contém o orifício alimentador do difusor pode ou não estar incluída no domínio de cálculo. Caso seja incluída ela é tratada como se a viscosidade do fluido desta região fosse infinita, Patankar (1978) (procedimento utilizado por Pilichi, juntamente com o Modelo 0). Deste modo as condições de contorno de não-deslizamento nas paredes externas do assento são transmitidas por difusão para dentro do domínio, propiciando uma simplificação do domínio de cálculo. Para que não se inclua a região sólida e desta forma obtenha-se economia da malha computacional, pode-se individualizar os volumes de controle das fronteiras 3, 4 e 5, conforme implementação em esquema colocalizado apresentado por Langer et alli (1993a). Presentemente usa-se esta individualização nos Modelos 1, 2, 3, 4 e 5 apresentados conforme capítulo 4.

## 7.4 - HISTÓRICO DAS IMPLEMENTAÇÃO DE METODOLOGIAS EMPREGADAS

Inicialmente planejou-se uma sequência de implementações numéricas para captar os resultados experimentais obtidos por Pilichi (1990). A seguir apresentam-se estas implementações na ordem cronológica em que foram testadas.

A primeira tentativa foi a implementação do esquema de Pilichi para problemas transientes, mantendo-se a mesma malha de 3150 pontos internos ao escoamento e 1750 pontos sobre a região sólida (total de 70x70 pontos) e mantendo o esquema de discretização com malha desencontrada com interpolação via Lei da Potência, (Patankar, 1980), chamado de Modelo 0. Pilichi aplicou o esquema SIMPLER de acoplamento entre pressão e velocidade, enquanto no presente trabalho aplicaram-se os esquemas SIMPLE e SIMPLEC.

Esta tentativa transiente de se captar uma nova configuração para a distribuição de Nusselt não foi eficiente, pois obtiveram-se os mesmos resultados de Pilichi, ou seja, um único pico no número de Nusselt e uma única bolsa de recirculação que se abre a partir da quina do difusor e permanece aberta até a saída do difusor, isto ocorre para números de Reynolds superiores a 2000. Nestes testes ocorreu uma grande dificuldade para se convergir o processo iterativo, necessitando-se de baixos incrementos de tempo ou baixos coeficientes de subrelaxação. Estas dificuldades também foram verificadas por Pilichi com acoplamento SIMPLER.

Uma outra tentativa de melhorar a metodologia numérica está associada ao tratamento das condições de contorno na saída do difusor. Langer (1991) demonstrou em seu trabalho que uma bolsa de recirculação, quando truncada por um domínio de cálculo, sofre uma pequena deformação, que altera a sua forma natural. Pilichi usou condição de primeira derivada nula para  $U$  e  $rV$ , que impõe uma inclinação nula das linhas de corrente na fronteira. No presente trabalho experimentaram-se condições de derivada segunda nula para  $U$  e  $rV$  na saída do difusor, que é equivalente a uma extrapolação linear de  $U$  e  $rV$ . Neste caso impõe-se curvatura nula às linhas de corrente, deixando livre sua inclinação. Também não houve alteração substancial nos resultados. Bottaro (1990), estudando um problema de convecção mista, onde os efeitos convectivos-difusivos estão em equilíbrio, inclusive na saída de um canal, mostrou um arranjo para a condição de contorno baseada na linearização dos termos convectivos, onde os fluxos associados ao transporte convectivo são avaliados através de uma velocidade de propagação da condição de contorno na secção de saída do canal. Com esta metodologia obtém-se uma equação evolutiva transiente para a condição de contorno. Bottaro (1990) obteve excelente continuidade do escoamento na saída do canal, enquanto as condições de contorno de derivada nula, extrapolação linear e hiperbólica deformaram o escoamento nesta região. Esta condição de contorno foi experimentada no presente trabalho, mas apresentou problemas de convergência devido à alta convecção existente no escoamento radial e foi abandonada para o presente caso. Uma outra condição de contorno conveniente em regiões de entrada ou saída de um escoamento é a condição

de pressão prescrita. Nesta metodologia deve-se conhecer a pressão no contorno para então calcular-se o campo de velocidades através de um balanço específico de quantidade de movimento efetuado no volume de controle do contorno. Maiores detalhes desta metodologia podem ser encontrados nos trabalhos de Marcondes (1988) e Peters et alli (1993), que aplicaram este mesmo princípio para pressão prescrita localmente na entrada e saída de um canal vertical com sucção induzida pela convecção natural existente. No problema citado, esta metodologia permitiu uma avaliação precisa da vazão mássica succionada. Diante destas experiências anteriores, testou-se esta condição de contorno para tentar reproduzir melhor a condição física de uma saída de canal aberta para o ambiente, que é o caso do difusor estudado experimentalmente. Os resultados obtidos com esta formulação foram virtualmente os mesmos apresentados por Pilichi. Cabe frisar que todas estas condições de contorno mencionadas anteriormente foram aplicadas com a discretização sobre a mesma malha de Pilichi, 70x70 pontos e com a mesma metodologia numérica, Patankar (1980), Modelo 0.

Um outro fator que pode distorcer os resultados numéricos é a difusão numérica (Raithby, 1976a e b). A difusão numérica foi avaliada por Deschamps (1987) justamente na região de entrada do difusor, onde o escoamento muda de direção e gera uma bolsa de recirculação. Exemplos mais recentes de estudos sobre difusão numérica podem ser encontrados em Silva (1991) e Souza (1992). Para minimizar a difusão numérica pode-se refinar a malha computacional ou utilizar funções de interpolação mais precisas. Ambas as possibilidades serão exploradas na secção subsequente, com intuito de determinar o número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial.

Até aqui descreveram-se algumas implementações numéricas que não apresentaram sucesso na captação do segundo pico de número de Nusselt. A seguir apresenta-se uma descrição cronológica dos vários outros pontos que foram atacados na formulação numérica, baseados nos resultados de transferência de calor, e que apresentaram melhores resultados.

## 7.5 - ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O objetivo maior do presente capítulo é reproduzir os dados experimentais obtidos por Pilichi (1990). O próprio Pilichi fez uma avaliação numérica em regime estacionário deste problema, mas não conseguiu uma concordância satisfatória entre resultados numéricos e experimentais. Através de uma simulação em regime transiente esperava-se captar oscilações auto-induzidas pelo escoamento e com isto detectar o segundo pico no número de Nusselt local determinado experimentalmente. A solução numérica obtida desta implementação continuou sendo estacionária, frustrando as expectativas originais.

Numa segunda tentativa, tentou-se melhorar as condições de contorno na saída do difusor. Os resultados destes testes também foram análogos aos de Pilichi e as distribuições de números de

Nusselt e linhas de corrente permaneceram praticamente sem alteração. Assim, optou-se por manter a extrapolação linear como condição de contorno na saída do domínio de cálculo para as implementações subseqüentes, haja visto que esta condição de contorno apresentou resultados excelentes na avaliação do escoamento transiente sobre prisma quadrado, apresentado no capítulo 5.

Diante do quadro exposto buscou-se um refino da malha computacional, visando minimizar os efeitos da difusão falsa. Para atingir este objetivo adotou-se um esquema de resolução do sistema de equações lineares em que a região sólida não é resolvida. Este esquema foi empregado por Langer et alli (1993a) em escoamentos turbulentos no mesmo tipo de geometria do presente trabalho e apresentou sensível economia de tempo de CPU. Com esta metodologia deixa-se de resolver as equações referentes à parte sólida do domínio de cálculo e, portanto, pode-se refinar a malha com mais eficiência. Esta metodologia incorpora a discretização em malha colocalizada com interpolação via Lei da Potência e foi denominada de Modelo 1 (vide capítulo 4).

Em um primeiro refino de malha passa-se a resolver apenas 10% a mais de pontos nodais do total usado por Pilichi, ou seja, passou-se a resolver 5400 pontos, enquanto Pilichi utilizava 4900 pontos nodais (70x70). Porém como Pilichi incluiu a região sólida associada ao orifício alimentador, apenas 3150 pontos eram aproveitados no escoamento interno. Houve na realidade um ganho de 70% no refino efetivo da malha interna no difusor, 5400 pontos contra 3150 pontos de Pilichi (1990).

Desta aplicação do esquema colocalizado com interpolação via Lei da Potência (Modelo 1) obteve-se uma primeira luz para a captação do segundo pico de número de Nusselt obtido experimentalmente por Pilichi. Na figura 7.2 apresentam-se distribuições locais do número de Nusselt obtidas através da presente formulação, juntamente com os respectivos resultados experimentais obtidos por Pilichi (1990) para  $Re'=2727$  e  $Re'=4595$  com  $s/d = 0,07$  e  $D/d=3,15$ . A posição  $r=7,15$ , indicada na figura 7.2, define o raio do orifício alimentador, que é a posição da quina na entrada dos dois discos paralelos.

Conforme observado na figura 7.2, a distribuição local do número de Nusselt ainda está longe de ser satisfatória, todavia existe uma indicação de que algum efeito ainda não captado esteja se manifestando, pois Pilichi havia obtido numericamente apenas uma distribuição monotonicamente decrescente, a partir do primeiro pico no número de Nusselt, e a solução numérica da figura 7.2 mostra uma alteração na distribuição de  $Nu$  para  $r$  em torno de 22.

Dando continuidade a esta linha de investigação, efetuaram-se novos refinamentos na malha e obtiveram-se resultados cada vez mais próximos aos encontrados experimentalmente por Pilichi. À medida que se refinava a malha crescia gradativamente um segundo pico do número de Nusselt avaliado sobre o disco aquecido do difusor radial, até o momento em que este não era mais afetado pela malha utilizada. Tais resultados são apresentados nas figuras 7.3 para  $Re'=2727$  e  $Re'=4595$  com  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$  para malha de 12800 pontos internos ao difusor radial.



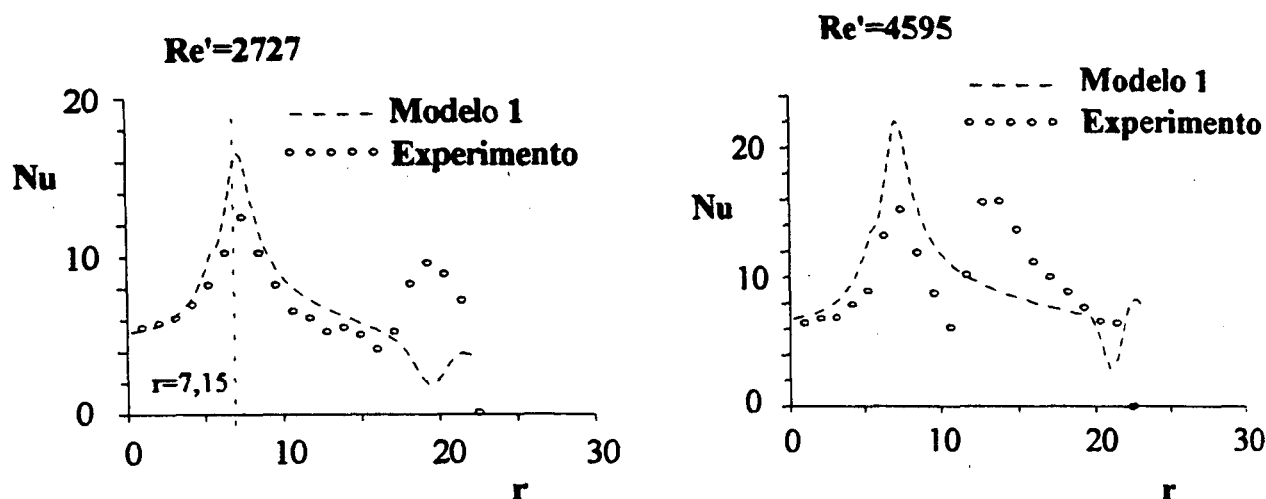


Figura 7.2 - Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 5400 pontos;  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ .

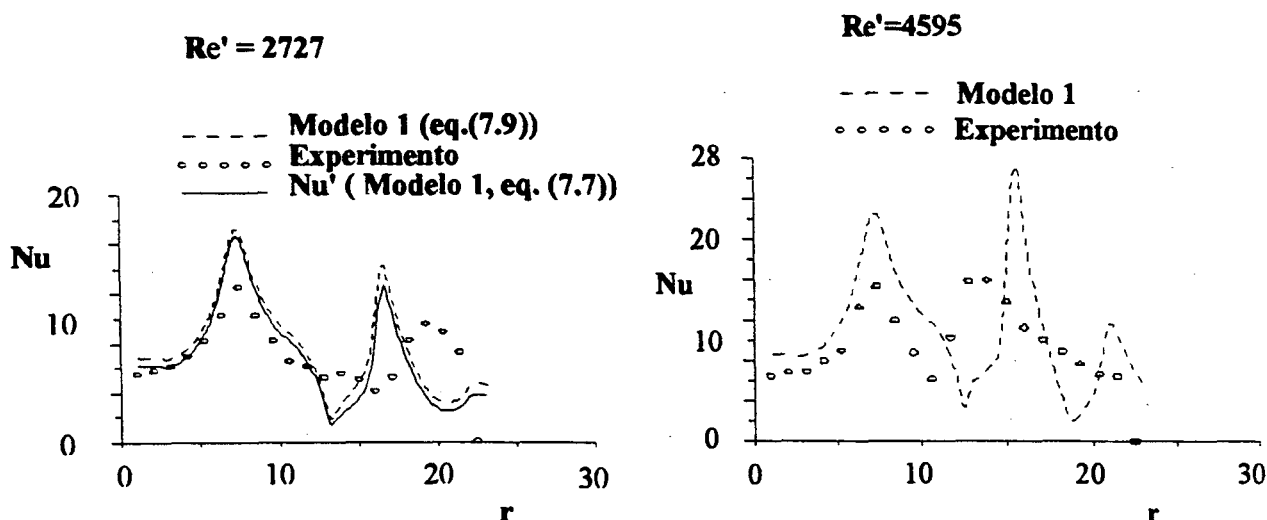


Figura 7.3 - Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos;  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ .

Os resultados obtidos com esta malha mais refinada são bastante satisfatórios, pois pela primeira vez, captou-se com relativa precisão o perfil experimental de Pilichi, ou seja, dois picos no número de Nusselt local, muito embora o segundo pico esteja localizado em uma posição ligeiramente distinta em relação ao resultado experimental. Adicionalmente observa-se um terceiro pico na distribuição de  $Nu$  versus  $r$ . Testes adicionais foram feitos com uma malha ainda mais refinada, contendo 17200 pontos, e as distribuições de número de Nusselt praticamente não se alteraram em relação à malha anterior. Desta forma adotaram-se os resultados da figura 7.3 como satisfatórios e independentes da malha utilizada, o que não significa que esta distribuição seja definitiva, como será visto posteriormente. Resultados para baixos números de Reynolds, como

para  $Re' = 1045$  e  $s/d = 0,10$  são idênticos aos obtidos por Pilichi e também independem da malha utilizada.

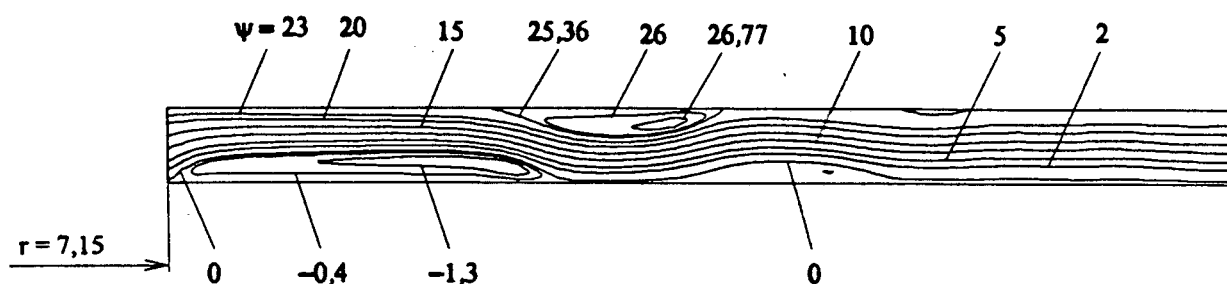
Na figura 7.3 apresenta-se em linha cheia a distribuição de número de Nusselt segundo a eq. (7.7). Nota-se que a diferença de  $Nu'$  para  $Nu$ , pode ser desprezada, considerando a incerteza associada ao resultado. Em todos os demais casos utilizou-se a definição dada pela eq.(7.9), para  $Nu$  baseado na temperatura de mistura.

Os resultados apresentados até o momento foram obtidos através do Modelo 1, baseado na discretização proposta por Majumdar (1988). Durante o processo de implementação dos vários modelos em malha colocada aqui apresentados, notou-se uma dependência dos resultados com o incremento de tempo utilizado, assim como Majumdar detectou e eliminou esta dependência dos resultados com o fator de sub-relaxação. O problema foi notado no valor do resíduo da equação da continuidade, que era fortemente alterado quando se refinava o incremento de tempo utilizado no processo iterativo. Assim, cada vez que se queria refinar a malha temporal, ocorria uma perturbação numérica momentânea no campo de velocidades. Uma solução para eliminar esta dependência foi proposta por Langer et alli (1993a) e está detalhada no Apêndice D.

Para verificar a real magnitude de dependência da solução com o incremento de tempo, geraram-se as mesmas soluções apresentadas na figura 7.3.a, para  $Re'=2727$ , aplicando-se a correção proposta por Langer et alli (1993a). As distribuições de número de Nusselt foram obtidas com o Modelo 1 em regime de transiente distorcido, pois as sub-relaxações não foram suficientes para uma convergência monotônica. No caso utilizou-se um incremento de tempo  $\Delta\tau$  igual a 0,001. Os resultados obtidos para a distribuição de Nusselt com o modelo corrigido foram praticamente os mesmos que os resultados associados ao esquema colocado originalmente proposto por Majumdar (1988). A diferença ocorrida entre a distribuição do número de Nusselt obtido com correção em relação ao Modelo 1 sem correção é inferior a 3% para  $Re'=2727$ ,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ . Conforme observado no Apêndice D, a metodologia proposta por Langer et alli (1993a) embora gere resultados independentes do intervalo de tempo  $\Delta\tau$ , é menos estável, numericamente, do que a metodologia de Majumdar (1988). Em vista deste aspecto manteve-se aqui o uso do esquema de Majumdar para escoamentos não estacionários.

No presente momento deste trabalho verificou-se uma situação de impasse, pois obtiveram-se resultados qualitativamente corretos, mas que quantitativamente são distintos dos resultados experimentais. Além do mais não se tem certeza de que o resultado obtido seja realmente independente da discretização utilizada. Note-se que Pilichi havia testado várias malhas e chegou a conclusão de que aquela adotada em seu trabalho (70x70 pontos) já captava um escoamento independente da malha. Pilichi testou várias malhas e encontrou sempre o mesmo padrão de escoamento, que era uma grande bolsa de recirculação que se abria da quina do orifício até a saída do difusor (vide figura 2.6). No presente trabalho tem-se um novo padrão de escoamento para uma malha de 12800 pontos, caracterizado na figura 7.4, onde ao invés de uma única bolsa de recirculação tem-se várias recirculações menores.

**Re' = 2727**



**Re' = 4595**

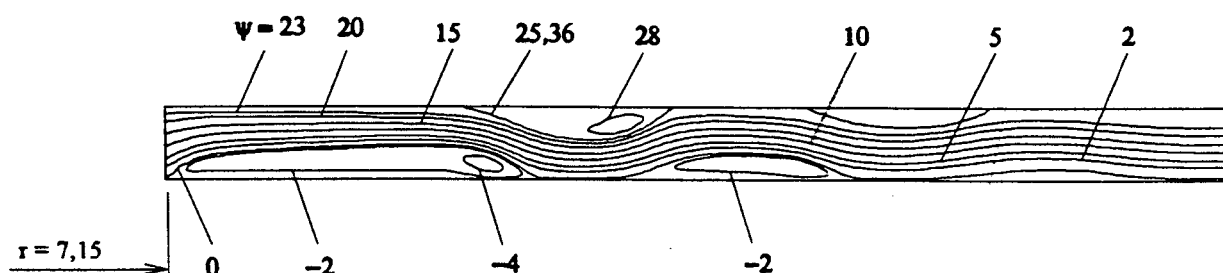


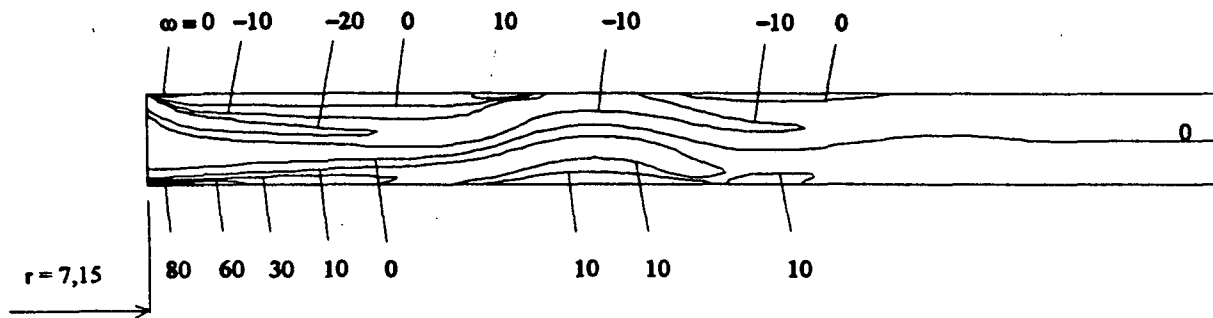
Figura 7.4 - Campo de linhas de corrente para malha de 12800 pontos obtidos com o Modelo 1,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ .

Apresentam-se na figura 7.5 seqüências de linhas de iso-vorticidade avaliadas em coordenadas cilíndricas segundo a equação (7.12).

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (7.12)$$

Na figura 7.5 nota-se que há uma grande geração de vorticidade na região de entrada do difusor radial, justamente onde o fluido muda de direção ao passar do orifício para o difusor propriamente dito. Na região de saída do difusor radial aparece claramente a linha de vorticidade nula na região mediana entre os dois discos do difusor indicando um escoamento tendendo ao plenamente desenvolvido.

$Re'=2727$



$Re'=4595$

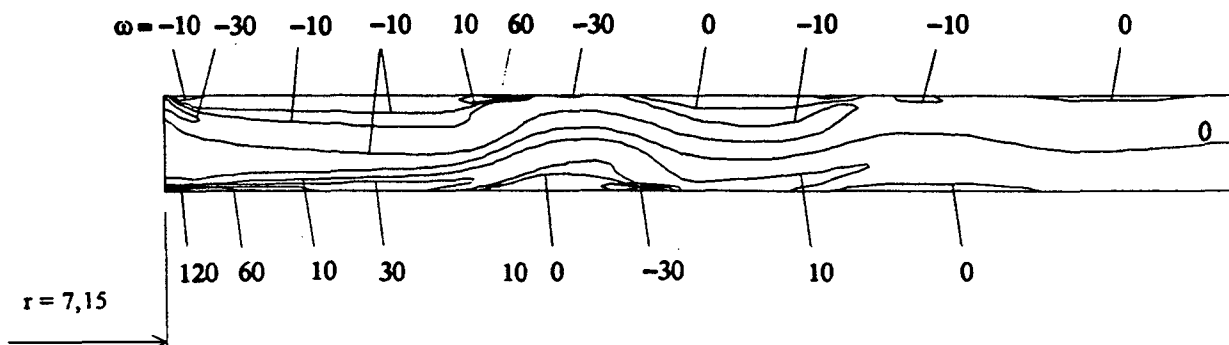


Figura 7.5 - Campos de vorticidade na região do difusor radial com alimentação axial obtidos para o escoamento apresentado na figura 7.4.

No decorrer do presente capítulo, apresentar-se-á uma série de campos de linhas de corrente análogos aos da figura 7.4, onde todos são restritos à região interna do difusor radial, ou seja, confinada entre os discos do difusor ( $r > d/2$ ).

Nota-se na figura 7.4 que o primeiro pico no número de Nusselt local (figura 7.3) corresponde ao ponto de maior incidência do fluido frio proveniente do orifício, exatamente onde o fluido frio lava o disco frontal com maior intensidade. Os demais picos no número de Nusselt ocorrem nas regiões de reatamento das bolsas de recirculação junto ao disco frontal, exatamente onde há o encontro do fluido externo da camada viscosa (fluido mais frio) com o disco aquecido gerando assim um alto gradiente térmico nestes locais de reatamento. Para uma discussão mais detalhada da relação entre os picos na distribuição de  $Nu$  e as linhas de corrente referencia-se a Langer et alli (1993b).

A atenção será agora focada em metodologias que permitam uma avaliação numericamente mais precisa do escoamento. Uma possibilidade de melhorar a precisão dos resultados é investir numa melhor função de interpolação das velocidades das faces dos V.C. Hayase et alli (1992) propuseram uma interpolação quadrática consistente com o método dos volumes finitos. No

trabalho de Hayase tem-se uma formulação para malhas uniformemente distribuídas, que foi facilmente estendida para malhas não igualmente espaçadas, conforme esquema apresentado no Apêndice B.

Seguindo esta sequência de refinamento na metodologia de solução, implementou-se a interpolação quadrática QUICK consistente, segundo esquema apresentado no Apêndice B. Note-se que esta interpolação já foi aplicada ao difusor radial com alimentação radial apresentando bons resultados. A interpolação QUICK aplicada à metodologia de discretização colocalizada, proposta por Majumdar, em um domínio em forma de L, conforme Langer et alli (1993a), foi anteriormente denominada de Modelo 2 (vide capítulo 4).

Cabe lembrar que a interpolação QUICK consistente permitiu uma simulação numérica com excelente concordância entre os resultados dos campos de pressão numérico e analítico para os dois limites do escoamento radial: o puramente viscoso e o invíscido (vide Apêndice A). Em ambos, a comparação do campo de pressão numérico obtido foi excelente, revelando assim uma metodologia adequada a este tipo de escoamento.

Uma outra alternativa para tentar captar melhor o escoamento é a resolução da equação para a variável produto  $rV$ , que não sofre os efeitos da expansão na área de passagem presente no difusor radial. Esta formulação também foi experimentada nos escoamentos limites citados com interpolação QUICK consistente e forneceu resultados excelentes para distribuição de pressão. O esquema proposto no Modelo 2 aplicado para  $U$  e  $rV$  foi denominado de Modelo 3 (vide capítulo 4). Neste capítulo, aplicou-se o Modelo 3 resolvendo-se equações idênticas às eqs.(6.6-8), usando-se adimensionalizações coerentes com a geometria do difusor radial com alimentação axial. As componentes de velocidade foram adimensionalizadas em termos da velocidade  $U_e$  na entrada do orifício e do espaçamento  $s$  entre discos. Estabeleceu-se um raio de referência em  $r_1$  e uma velocidade média  $\bar{V}$  em  $r = r_1$ , pois o produto  $rV$  está vinculado apenas à vazão na entrada do orifício ( $r_1 \cdot \bar{V} = U_e r_1 / 2s$ )

Aplicaram-se os Modelos 2 e 3 primeiramente com uma malha mais grosseira de 5400 pontos e depois usou-se uma malha mais refinada de 12800 pontos nodais. Destas implementações obtiveram-se as distribuições de número de Nusselt local conforme as figuras 7.6 e 7.7 respectivamente, para a malha mais grosseira e mais refinada.

Observa-se que a interpolação QUICK consistente adotada no presente trabalho consegue captar melhor os resultados experimentais de Pilichi que a interpolação via Lei da Potência para a mesma malha utilizada de 5400 pontos. Na figura 7.2, capta-se o início de um segundo pico no número de Nusselt local, utilizando-se a interpolação dada pela Lei da Potência, e na figura 7.6 tem-se uma definição clara deste segundo pico. Tais resultados foram obtidos com a mesma malha de 5400 pontos, que é relativamente grosseira. Os resultados obtidos na figura 7.6 com malha de 5400 pontos e interpolação QUICK consistente são análogos aos resultados obtidos na figura 7.3 com malha mais refinada de 12800 pontos e interpolação dada pela Lei da Potência. Tais resultados mostram a superioridade da interpolação QUICK consistente. Este é um aspecto decisivo no caso do escoamento na direção radial, pois a interpolação dada pela Lei da Potência

não é adequada quando os efeitos de inércia crescem em importância (vide discussão no capítulo 4).

Todos os modelos testados até o momento, para  $Re'=4595$  e  $s/d=0,07$ , não apresentaram o que se poderia chamar de uma "convergência plena". Em nenhum dos testes se conseguiu reduzir o resíduo da equação da conservação da massa aos níveis de precisão disponíveis no computador utilizado ( $10^{-9}$ ). Este fato já havia se manifestado na expansão plana estudada por Cherdron et alii (1978) e no difusor radial estudado por Langer (1991) para altos valores de Reynolds. Este é um efeito não estacionário e está associado às oscilações de pequena amplitude nas camadas cisalhantes. Conforme explorado no capítulo 6, escoamentos transientes foram detectados no difusor radial com alimentação radial, utilizando-se as metodologias numéricas mais precisas. A mesma prática será adotada no que se segue.

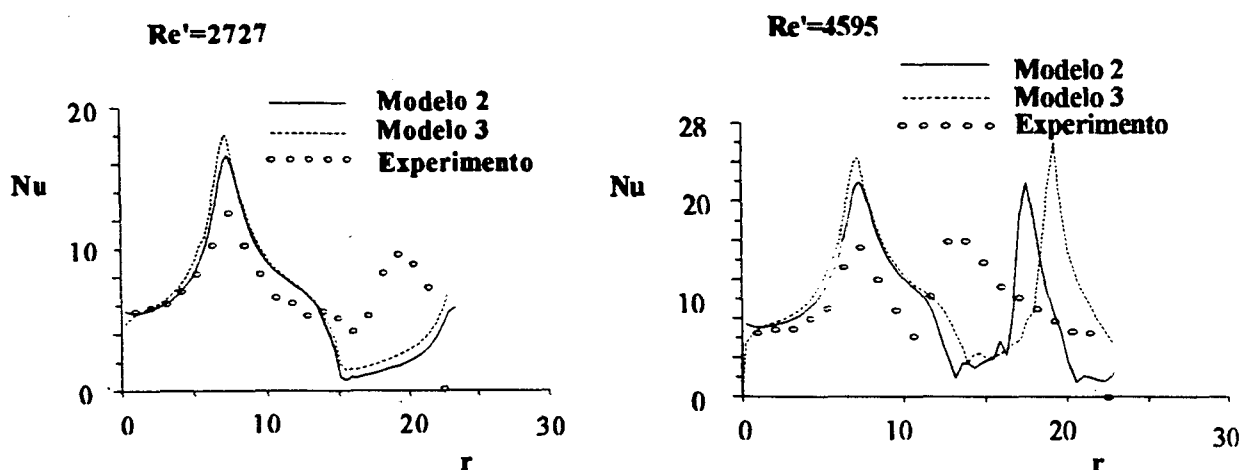


Figura 7.6 - Distribuição do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 5400 pontos;  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ .

Suportados pelos Modelos 2 e 3 com interpolação QUICK consistente, refinou-se a malha utilizada para 12800 pontos e obteve-se uma distribuição de número de Nusselt inédita, onde foi encontrada uma sequência de picos, conforme ilustrado na figura 7.7, caracterizando um escoamento oscilatório. Tal distribuição foi obtida tomando-se um incremento de tempo muito pequeno,  $\Delta\tau=0,001$  (em comparação com o valor de  $\Delta\tau=0,1$  usado até então), e ainda utilizando-se subrelaxação na atualização das variáveis. O resíduo tolerável da equação da continuidade, imposto à convergência interna transiente, é da ordem de  $10^{-5}$  em todos casos apresentados neste trabalho. As configurações de escoamento para o difusor com alimentação axial obtidas até então eram todas em regime estacionário. Pela primeira vez obteve-se um regime oscilatório.

Em princípio não há uma boa concordância com os resultados experimentais, mas esta é uma distribuição instantânea do número de Nusselt comparada com uma distribuição média proveniente do experimento de Pilichi. Por isso procurou-se conhecer melhor o comportamento

deste escoamento com o intuito de identificar um provável período de oscilação dentro do qual poder-se-ia calcular em cada posição radial um número de Nusselt local médio no tempo.

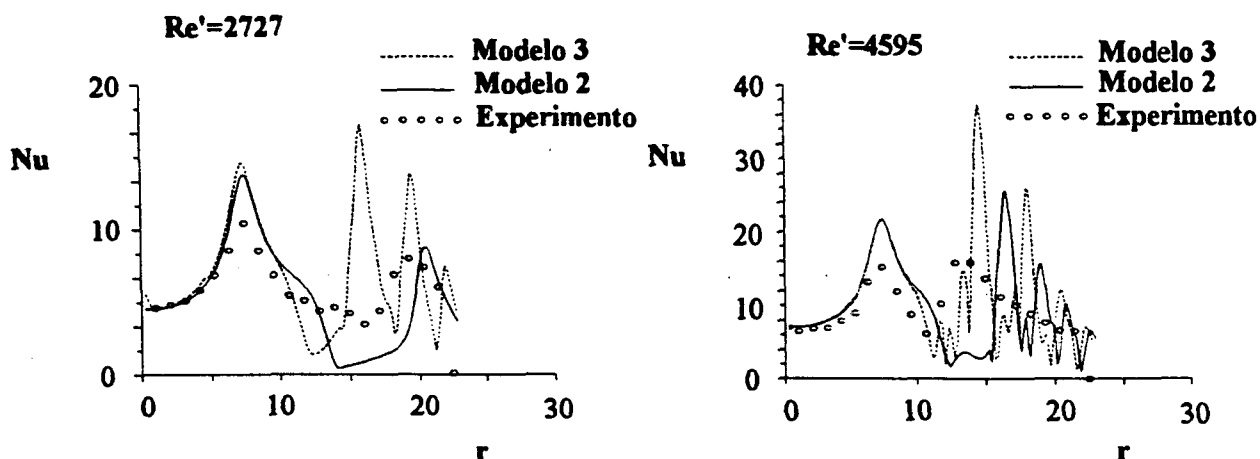


Figura 7.7 - Distribuição instantânea do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos;  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$ .

Apresenta-se nas figuras 7.8 e 7.9 uma análise das linhas de corrente dos escoamentos para a região interna aos discos do difusor, obtidas com os Modelos 2 e 3, respectivamente, com malha de 12800 pontos.

Observa-se nas figuras 7.8 e 7.9 que ocorrem oscilações no campo de velocidades. Vórtices são liberados da bolsa de recirculação gerada na parede superior e nota-se que esta segunda maior recirculação oscila ao longo da parede superior ejetando vórtices sucessivos. Tal comportamento é semelhante ao escoamento no difusor radial com alimentação radial apresentado no capítulo 6 para  $Re=1000$  (figura 6.5).

Na figura 7.8.b, referente ao escoamento com  $Re' = 4595$ , tem-se vários campos de linhas de corrente instantâneos capturados em instantes distanciados de  $\Delta\tau$ . A partir da sequência de linhas de corrente é possível se detectar a evolução dos vórtices. Apesar das configurações de escoamento serem semelhantes, não foi possível identificar um período de repetição das figuras nem de se atingir um regime estacionário. Para eliminar a possibilidade do escoamento ainda não se ter estabilizado, executou-se o código computacional gerador deste escoamento ainda por mais um longo tempo, para então tentar captar um possível período de oscilações. No entanto o que se observou, a partir de um certo instante, foi um aumento crescente no valor do resíduo da equação da conservação da massa, mesmo quando se aumentava o número de iterações da convergência interna no tempo e se diminuía o incremento de tempo ( $\Delta\tau$ ). Com esse aumento crescente do resíduo da equação da massa foi impossível evitar a divergência do processo iterativo.

**a).  $Re' = 2727$**



$\tau=15$



$\tau=30$



$\tau=36$

**b).  $Re' = 4595$**



$\tau=48$



$\tau=49$



$\tau=51$



$\tau=52$



$\tau=54$



$\tau=55$

Figura 7.8 - Campos de linhas de corrente obtidos com o Modelo 2 para malha de 12800 pontos.



a).  $Re' = 2727$



$\tau = 6$



$\tau = 7$

b).  $Re' = 4595$



$\tau = 20.005$



$\tau = 20.163$



$\tau = 20.321$



$\tau = 20.479$



$\tau = 20.637$



$\tau = 20.795$

Figura 7.9 - Campos de linhas de corrente obtidos com o Modelo 3 para malha de 12800 pontos.

Na figura 7.9 apresenta-se uma seqüência temporal de linhas de corrente, para  $Re'=2727$  e  $Re'=4595$  obtidas com o Modelo 3. Do mesmo modo que no modelo 2 (figura 7.8) não se conseguiu obter repetição dos padrões de escoamento. Não se conseguiu identificar um período

de oscilação para as velocidades e também não se conseguiu manter o escoamento dentro de uma estabilidade numérica desejável. Depois de um certo tempo, o campo de velocidades obtido para  $Re'=4595$  também se desestabiliza, fazendo com que o processo iterativo divergisse. Esta desestabilização ocorreu mais cedo do que no caso do Modelo 2.

O Modelo 3 foi empregado ao difusor radial com alimentação axial também com a correção transiente proposta por Langer et alli (1993a), conforme Apêndice D, mas os resultados obtidos foram piores. A desestabilização da solução transiente ocorreu mais rapidamente. Esta correção transiente também foi aplicada ao Modelo 2 e também ocorreu a desestabilização do processo iterativo, para o mesmo critério de convergência temporal interno usado na figura 7.8, isto é, para o mesmo resíduo da equação da continuidade a cada intervalo de tempo avançado, que foi de  $10^{-5}$ . Esta maior instabilidade numérica dos modelos corrigidos está discutida no Apêndice D.

Comparando-se os padrões de escoamento apresentados nas figuras 7.8 (interpolação QUICK com formulação U e V - Modelo 2) e 7.9 (interpolação QUICK com formulação U e rV - Modelo 3) observam-se diferentes configurações. O Modelo 3 consegue captar vórtices menores tanto para  $Re'=2727$  como para  $Re'=4595$ . Desta forma as soluções obtidas não são definitivas, uma vez que continuam dependentes da metodologia de solução utilizada.

Na figura 7.10 apresenta-se o comportamento transiente para  $Re'=4595$ , da componente de velocidade U, transversal ao escoamento, em dois pontos médios entre os discos: ponto 1 a  $r=12,5$  e ponto 2 a  $r=18$ , obtidos com Modelo 2 (vide figura 7.1).

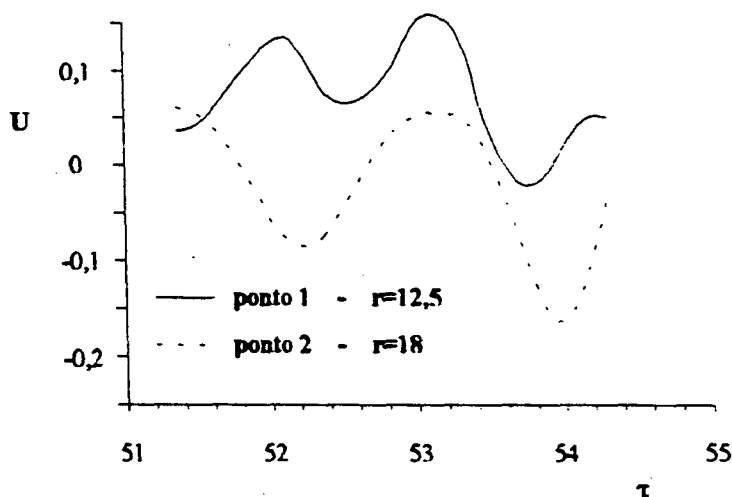


Figura 7.10 - Comportamento da componente U de velocidade transversal, para os pontos 1 e 2 (vide figura 7.1) para  $Re'= 4595$ ,  $s/d=0.07$  e  $D/d=3,15$  (Modelo 2).

Na figura 7.10 pode-se identificar melhor o comportamento aperiódico do escoamento. Tanto o Modelo 2 quanto o Modelo 3 apresentaram o que se chamaria de comportamento caótico.

O fato de o escoamento não ter apresentado um comportamento periódico causou grande surpresa. Comumente, na transição entre o escoamento laminar e turbulento, ocorre primeiro uma bifurcação entre um padrão estacionário e um padrão transiente periódico, para depois se atingir um padrão caótico. Outro fato atípico foi a desestabilização numérica do escoamento, de tal forma que o processo iterativo não conseguiu mais convergir nem quando se utilizavam os critérios de convergência mais rígidos.

Uma metodologia alternativa para tentar captar o presente escoamento é a aplicação do Modelo 4 apresentado no capítulo 4, que já foi testado e validado nos capítulos 5 e 6. Tal modelo aplica a interpolação QUICK consistente de Hayase et alli (1993) a uma malha desencontrada e, com isso, pode-se verificar a validade da aplicação do modelo colocalizado ao escoamento em consideração.

A seguir apresentam-se na figura 7.11 os resultados obtidos com o Modelo 4, relativo a uma malha desencontrada, para  $Re'=2727$  e  $s/d=0,07$ . Apresentam-se as distribuições de número de Nusselt instantâneo e médio em cada posição radial avaliados no intervalo de tempo entre  $\tau=93$  e  $\tau=193$ , onde o escoamento atingiu resíduos da equação da continuidade inferiores a  $10^{-5}$ .

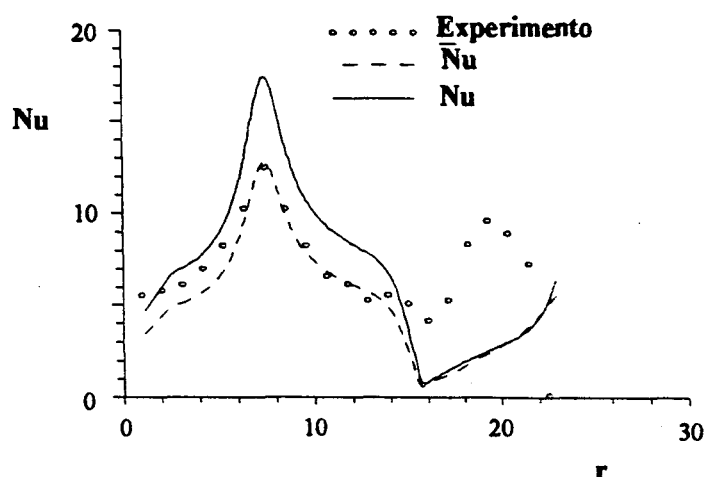


Figura 7.11 - Distribuição instantânea e média do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; para  $Re'=2727$ ,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$  (Modelo 4).

Os valores médios apresentados na figura 7.11 também foram obtidos com o Modelo 2 e são apresentados na figura 7.12 para o intervalo de tempo em que o escoamento foi simulado, antes do processo iterativo divergir. Pode-se verificar uma boa concordância entre as distribuições médias temporais dos números de Nusselt obtidas através dos Modelos 4 e 2.

Os resultados obtidos com o Modelo 4 em malha desencontrada para  $Re'=4595$  não foram diferentes daqueles obtidos com o Modelo 2 em malha colocalizada. Neste caso o escoamento oscila por um certo período e também se desestabiliza gradativamente até que o processo iterativo diverge. Portanto, o fato de não se conseguir captar o escoamento para  $Re'=4595$  não é

decorrente do esquema em malha colocizada, mas pode ainda ser decorrente do esquema de interpolação QUICK empregado. Afinal, segundo Tamamidis e Assanis (1993), o esquema QUICK é o menos dissipativo dos apresentados no capítulo 4 e, assim, podem surgir oscilações espúrias decorrentes do método numérico.

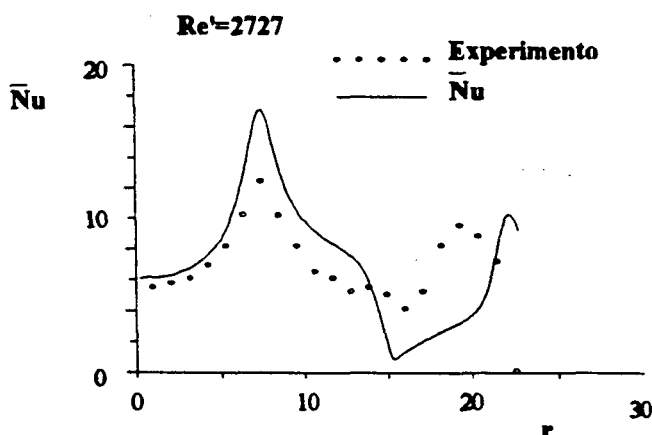


Figura 7.12 - Distribuição média temporal do número de Nusselt local no difusor radial com alimentação axial para malha de 12800 pontos; para  $Re'=2727$ ,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$  (Modelo 2).

Na figura 7.13 apresenta-se uma seqüência temporal de campos de linha de corrente obtidas com o Modelo 4, para a região interna aos discos do difusor.

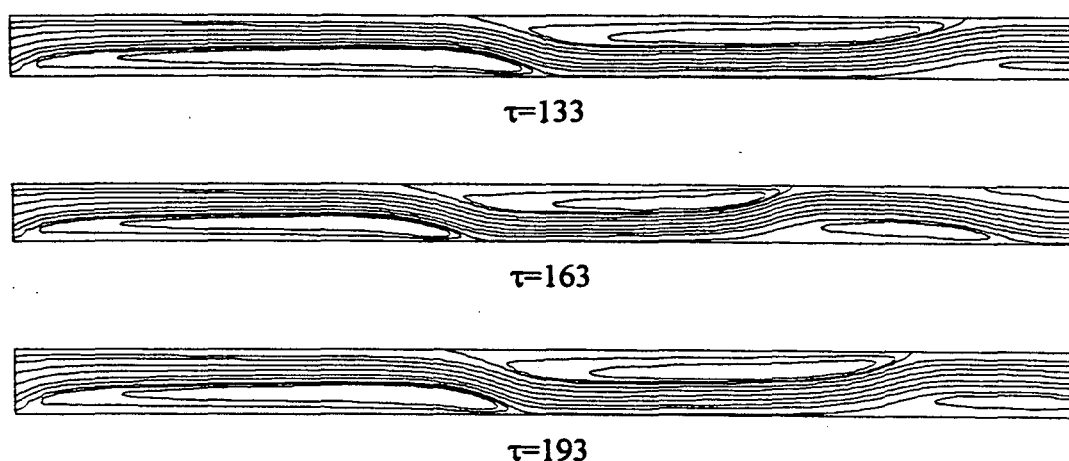


Figura 7.13 - Seqüência temporal de linhas de corrente para o escoamento no difusor radial com alimentação axial para  $Re'=2727$ ,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$  (Modelo 4).

Nota-se que o comportamento apresentado na figura 7.13 é análogo aos resultados obtidos com o Modelo 2 colocizado mostrados na figura 7.8.a.

Na figura 7.14 tem-se o comportamento local da componente de velocidade transversal para os pontos 1 e 2 indicados na figura 7.1. Desta figura pode-se comparar as diferentes oscilações que ocorrem no interior dos difusores radiais. No ponto 1, mais próximo da entrada do difusor radial, tem-se uma amplitude de oscilação superior às oscilações registradas no ponto 2, que se situa na região intermediária entre a entrada e a saída do duto radial. Desta figura é possível identificar um certo período de oscilação das velocidades, muito embora ocorram variações de amplitude ao longo do tempo.

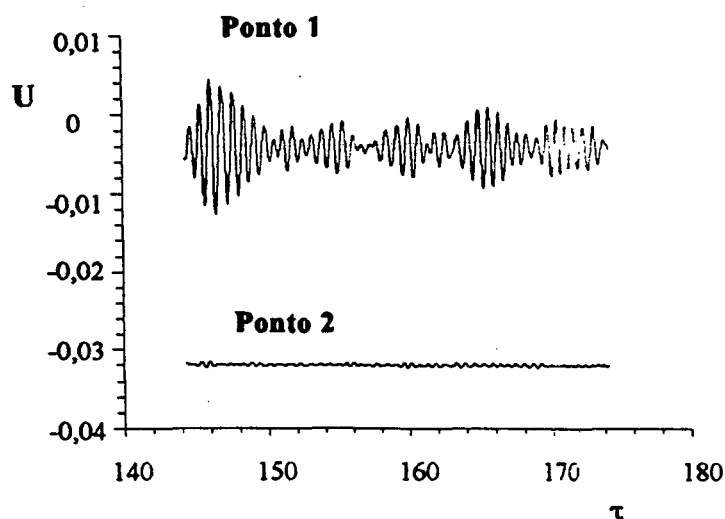


Figura 7.14 - Comportamento transiente da componente transversal da velocidade,  $U$ , nos pontos 1 e 2 indicados na figura 7.1;  $Re'=2727$ ,  $s/d=0,07$  e  $D/d=3,15$  (Modelo 4).

Para eliminar a dúvida quanto à validade da utilização do esquema de interpolação QUICK consistente no presente escoamento, adotou-se a alternativa da interpolação MSOU, que é considerada isenta de oscilações não físicas. Tal esquema foi incorporado à discretização em malha desencontrada, conforme Modelo 5 apresentado no capítulo 4 e testado nos escoamentos sobre prisma quadrado (capítulo 5) e escoamento puramente radial (capítulo 6).

A aplicação do Modelo 5 no escoamento em difusor radial com alimentação axial gerou resultados análogos aos obtidos com o Modelo 2 e 4, que utilizam a interpolação QUICK consistente. Com o Modelo 5 esperava-se que o escoamento não se desestabilizasse como vinha ocorrendo anteriormente, mas a desestabilização foi ainda maior e ocorreu mais cedo que nos casos anteriormente apresentados. Houve inclusive desestabilização do escoamento para  $Re'=2727$ , que é numericamente estável quando obtido com a interpolação QUICK consistente.

Assim, em princípio, tudo indica que os padrões de escoamento obtidos no presente capítulo estão isentos de oscilações de origem numérica. Usando-se um modelo essencialmente não oscilatório como MSOU, obteve-se um resultado menos estável do que aqueles obtidos com o modelo QUICK consistente. Desta forma pode-se especular que a desestabilização da solução

numérica pode ser devida à falta de adequação do modelo numérico ao problema físico: possivelmente o escoamento tem padrão tridimensional, o que precisa ser melhor investigado.

Uma possível explicação para esta desestabilização numérica, e que não foi abordada por Tamamidis e Assanis (1993), pode estar associada à validade da interpolação MSOU em escoamento radiais. Esta interpolação é na verdade uma "extrapolação linear" dos vizinhos a montante da face onde se necessita de valor interpolado. Desta forma tem-se permanentemente presente uma grande variação da componente radial de velocidade devida à expansão de área existente. Então, neste tipo de escoamento, ocorre uma grande variação no valor extrapolado e o limitador de fluxo presente neste esquema monotônico é freqüentemente acionado. Este fato é relativamente incomum, pois o limitador de fluxo presente no esquema MSOU foi desenvolvido para amenizar as grandes variações decorrentes de altos gradientes nas componentes de velocidades. No difusor radial tem-se exatamente um escoamento onde estes gradientes são acentuados pela expansão de área existente, ou seja, além de se ter um escoamento com altos gradientes, tem-se este efeito extra decorrente da geometria. Por esta análise, a interpolação quadrática, QUICK consistente, parece ser mais apropriada neste caso de escoamento com expansão radial.

Esta classe de escoamentos na direção radial merece uma atenção especial, pois contém efeitos pouco explorados na literatura pertinente. Alternativamente poder-se-ia utilizar uma formulação em termos das variáveis modificadas  $U$  e  $rV$  em malha desconstruída e interpolações QUICK consistente e MSOU, análogos ao Modelo 3 em malha colocada. Nesta formulação o efeito de expansão de área sobre  $rV$  é eliminado.

Do exposto pode-se concluir que o escoamento radial precisa ainda de investigação numérica futura para se obter uma solução definitiva para o problema físico. Para se alcançar este objetivo é necessário avançar paralelamente uma investigação experimental deste escoamento. Pilichi fez uma investigação experimental da transferência de calor no difusor radial, mas mediu apenas o número de Nusselt em uma única posição diametral. Com isso Pilichi obteve uma distribuição simétrica do número de Nusselt nesta direção avaliada, mas não se tem informações sobre as demais direções. Há a necessidade de informações mais precisas, principalmente em relação ao campo de velocidades, onde medidas locais sejam realizadas.

Dentre os seis modelos aqui empregados, os que mais se aproximaram do caso experimental de Pilichi ainda foram o Modelo 1, com malha colocada e interpolação por Lei da Potência, que é equivalente ao Modelo 0 proposto por Patankar (1980), (ver figura 7.3), e o modelo 2, com malha colocada e interpolação por QUICK consistente (ver figura 7.12). Tais resultados apresentam oscilações, embora de pequena amplitude, acentuando-se nas regiões de camada cisalhante. Verifica-se que neste tipo de escoamento existe um efeito oscilatório permanente observável em todas as metodologias numéricas utilizadas.

Não se efetuaram avaliações tridimensionais do escoamento no difusor radial com alimentação axial, a exemplo do que foi feito no difusor com alimentação radial, mas certamente pode-se estender as conclusões obtidas no capítulo 6 (ver parágrafo que antecede a secção 6.3). Assim, para se obter um padrão transiente, com vórtices da dimensão dos que são apresentados no presente capítulo, é necessária uma grande demanda de memória e de tempo de CPU, que foge aos recursos computacionais disponíveis para o presente trabalho.

## Capítulo 8

### CONCLUSÕES

O escoamento de um fluido é regido por um conjunto de equações de conservação, que foram definidas há mais de um século. Com o advento dos métodos numéricos um grande passo foi dado para a compreensão destas equações, cujas soluções puderam então ser obtidas para uma grande variedade de situações. Um aspecto importante associado a uma dada solução das equações de conservação é a sua estabilidade. Diversas configurações de escoamento obtidas através das equações de conservação não são possíveis de existir na realidade em virtude de serem instáveis. É neste contexto que se inseriu a presente tese. Estudou-se aqui a estabilidade hidrodinâmica do escoamento de fluidos em difusores radiais.

Particular interesse foi devotado aos escoamentos radiais com alimentação radial. Primeiramente avaliaram-se os chamados escoamentos básicos, dentre os quais detectou-se um padrão inédito a  $Re=1000$ . Neste caso obteve-se um escoamento transiente, onde aparece uma sucessão de vórtices se desprendendo da maior bolsa de recirculação. Esta principal bolsa de recirculação já havia sido captada por Langer (1991) com a interpolação via Lei da Potência, mas o padrão de escoamento observado era estacionário. Presentemente adotaram-se as funções de interpolação QUICK e MSOU, consistentes com o método dos volumes finitos, o que permitiu maior liberdade ao escoamento. Sendo a Lei da Potência um esquema de interpolação de primeira ordem, ele é mais restritivo do que os esquemas de ordem mais elevada como o QUICK consistente e o MSOU. Com estas interpolações, esta maior bolsa de recirculação se quebrou em um bolsa menor que cresce até um ponto onde há a liberação de um vórtice, formando uma sequência de vórtices sendo arrastados pelo escoamento.

Aplicou-se a teoria da estabilidade hidrodinâmica às equações completas das pequenas perturbações em regime transiente, sem as restrições comumente adotadas na equação de Orr-Sommerfeld. Com isto captaram-se dois pontos de bifurcação no escoamento radial com alimentação radial. O primeiro ponto obtido confirma os resultados obtidos por Langer (1991) e Oliveira (1992) e o segundo é um resultado inédito, definindo a transição entre um padrão assimétrico estacionário e um padrão transiente (bifurcação de Hopf) para um número de Reynolds em torno de 850. Este segundo ponto de bifurcação não foi captado por Oliveira (1992) com a teoria da estabilidade hidrodinâmica baseada no método espectral, pois esta teoria não permite a captação de perturbações oscilatórias que surgem quando ocorre uma bifurcação para o escoamento transiente. Oliveira (1992) encontrou ponto de bifurcação para  $Re=300$ , em uma faixa onde o escoamento básico não apresentou alterações de comportamento e se manteve estacionário.



O difusor radial com alimentação axial também foi alvo de intensa investigação numérica. Tal escoamento apresenta dois fatores desestabilizantes: a mudança brusca na direção da corrente de fluido, ao passar do orifício para o interior do difusor, e o efeito do gradiente adverso de pressão, presente também no difusor com alimentação radial. Abordou-se aqui o problema da transferência de calor em tais difusores, motivado pelo resultados experimentais de Pilichi (1990). De acordo com as medições de Pilichi, o difusor com alimentação axial apresenta uma distribuição do coeficiente de transferência de calor entre o disco frontal e o fluido com picos distribuídos de modo peculiar. O número de Nusselt local obtido experimentalmente por Pilichi foi difícil de ser obtido numericamente, e neste sentido implementou-se uma sequência de modelos numéricos. Desta investigação surgiram metodologias que possibilitaram a obtenção de uma distribuição do número de Nusselt satisfatória. Conseguiu-se esclarecer alguns aspectos desta distribuição utilizando-se as chamadas metodologias mais precisas baseadas na interpolação via QUICK consistente (Hayase et alii, 1992). Acredita-se que o escoamento que gera a distribuição experimental do número de Nusselt captada por Pilichi seja um padrão periódico, embora não se tenha identificado um período de oscilação no campo de velocidades. É de se esperar que depois de um escoamento com padrão estacionário ocorra primeiramente um padrão transiente periódico para depois surgir um padrão aperiódico. Aplicou-se ainda uma interpolação considerada isenta de oscilações não-físicas, MSOU (Tamamidis e Assanis, 1993), e com esta interpolação não foi possível manter a estabilidade numérica do escoamento radial com alimentação axial, resultando na divergência iterativa do método numérico. Este resultado pode indicar que o modelo bidimensional não é adequado para a simulação deste escoamento supostamente axissimétrico. Segundo Pilichi (1990) a distribuição experimental de Nusselt é diametralmente simétrica, o que sugere um escoamento de padrão axissimétrico. Este no entanto é um ponto que necessita de uma investigação mais profunda. Modelações tridimensionais realizadas para o difusor com alimentação radial mostraram que para definir o escoamento na região entre o regime laminar e turbulento, como é o caso aqui, a capacidade da infraestrutura computacional deveria ser consideravelmente superior.

A seguir apresenta-se um resumo dos resultados globais obtidos no presente trabalho para os diversos escoamentos estudados, com as seis metodologias descritas no capítulo 4, conforme sequência abaixo,

- Modelo 0** - malha desconstruída, domínio único e interpolação via Lei da Potência;
- Modelo 1** - malha colocalizada, domínio em L e interpolação via Lei da Potência;
- Modelo 2** - malha colocalizada, domínio em L e interpolação via QUICK consistente;
- Modelo 3** - malha colocalizada, domínio em L, interpolação via QUICK consistente com resolução das variáveis U e  $rV$ ;
- Modelo 4** - malha desconstruída, domínio em L e interpolação via QUICK consistente;
- Modelo 5** - malha desconstruída, domínio em L e interpolação via MSOU.

Tabela 8.1). Escoamento em expansão Plana (razão de expansão igual a três)

Padrão de escoamento	Condições
Escoamento simétrico estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho até <math>Re=90</math> (Modelo 0)</li> <li>- Cherdron (1978) até <math>Re=45</math> (experimental)</li> <li>- Sobey (1985) até <math>Re=75</math></li> <li>- Shapira (1990) até <math>Re=83</math></li> <li>- Oliveira (1992) até <math>Re=80</math></li> </ul>
Escoamento assimétrico estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho de <math>Re=90</math> até 1300 (Modelo 0)</li> <li>- Cherdron (1978) de <math>Re=45</math> a 300</li> </ul>
Escoamento não-estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho acima de <math>Re=1300</math> padrão com pequenas oscilações</li> <li>- Cherdron (1978) padrão transiente acima de <math>Re=300</math></li> </ul>

Tabela 8.2). Escoamento sobre prisma quadrado

Padrão de escoamento	Condições
Escoamento simétrico estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho até <math>Re=40</math> (Modelos 0, 4 e 5)</li> <li>- Kelkar (1988) até <math>Re=53</math></li> </ul>
Padrão transiente com ejeções de vórtices	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho para <math>Re</math> acima de 40 (Modelos 0, 4 e 5)</li> <li>- Kelkar (1988) acima de <math>Re=53</math></li> </ul>

Tabela 8.3). Escoamento radial com alimentação radial

Padrão de escoamento	Condições
Escoamento simétrico estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho até <math>Re=120</math> (Modelos 0, 1, 2, 3, 4 e 5)</li> <li>- Langer (1991) até <math>Re=115</math> (Modelo 0) confirmado por Oliveira (1992)</li> </ul>
Escoamento assimétrico estacionário	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho até <math>Re=850</math> (Modelos 2, 3, 4 e 5)</li> <li>- Langer (1991) até o valor de Reynolds estudado, <math>Re=1000</math></li> <li>- Oliveira (1992) obteve bifurcação para <math>Re=300</math></li> </ul>
Padrão transiente com ejeções de vórtices	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente trabalho testado a partir de <math>Re=1000</math> (Modelos 2, 3, 4 e 5)</li> <li>- Langer (1991) e Oliveira (1992) não obtiveram este padrão</li> <li>- Mochizuki (1985) obteve este padrão teórica e experimentalmente, mas não reproduzido nem por Langer e nem no presente trabalho.</li> </ul>

Tabela 8.4). Escoamento radial com alimentação axial

Padrão de escoamento e transferência de calor	Condições
Escoamento estacionário	<p>- Presente trabalho até <math>Re'=2000</math> (Modelos 0, 1 e 2) e Nu com único pico</p> <p>- Pilichi até <math>Re'=4595</math> (obtido com modelo 0) e Nu com único pico</p>
Escoamento oscilatório	<p>- Presentemente tem-se distribuições de Nusselt para <math>Re'=2727</math> e <math>Re'=4595</math>, assim distribuídos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•Malha 5400 ptos - Modelo 0 e 1 - indicativo de um 2º pico em Nu</li> <li>•Malha 5400 ptos - Modelos 2 e 3 - 2º pico em Nu captado, mas deslocado em relação ao experimental em direção a saída</li> <li>•Malha 12800 ptos - Modelo 0 e 1 - 2º pico em Nu captado, mas também deslocado.</li> </ul> <p>Obs.: Nos casos apresentados acima registraram-se oscilações de pequena amplitude, estes se caracterizam por apresentar uma bolsa de recirculação junto ao disco frontal ao difusor, o que gera o 2º pico no Nu na região de reatamento desta.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•Malha 12800 ptos - Modelos 2, 3 e 4 - sequência de vários picos secundários no Nu, com registro de oscilações fortes. Instabilidade no processo iterativo para <math>Re'=4595</math> (não convergência). Obtiveram-se valores médios temporais de Nusselt, <math>\bar{Nu}</math>, para <math>Re'=2727</math>, onde com o modelo 2 o 2º pico fica deslocado para a saída, e com o Modelo 4 o 2º pico aparece ainda mais deslocado para saída do difusor.</li> <li>•Malha 12800 ptos - Modelo 5 - não convergiu para os dois <math>Re'</math> em questão (2727 e 4595).</li> </ul> <p>- Pilichi (1990) obteve numericamente sempre um único pico no Nu e padrão estacionário de escoamento.</p>

No presente trabalho surgiram algumas novidades com relação a alguns tipos de escoamentos. No entanto tem-se aqui uma situação peculiar, onde os escoamentos se encontram

na iminência de assumir um padrão transiente e, nesta faixa de número de Reynolds, existe uma extrema sensibilidade a qualquer variação na metodologia numérica empregada.

Como sugestão para trabalhos futuros tem-se a necessidade iminente de se obter padrões experimentais dos escoamentos radiais com campos de velocidades que possam ser comparados aos resultados numéricos. Do ponto de vista numérico, do método dos volumes finitos, é necessária uma investigação mais profunda dos métodos de discretização dos termos convectivos, abrangendo as funções de interpolação.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- BOTTARO, A.** Note on Open Boundary Conditions for Elliptic Flows. **Numerical Heat Transfer**. 18(B): 243-256, 1990.
- CHAKRAVARTHY, S.R. and OSHER, S.** A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Paper AIAA N° 85-0363, 1985.
- CHERDRON, W., DURST, F. and WHITELAW, J. H.** Asymmetric Flow and Instabilities in Symmetric Duct with Sudden Expansions. **J. Fluid Mechanics**. 84: 13-31, 1978.
- CRANK, J. and NICOLSON, P.** A Practical Method for Numerical Evaluations of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, 43: 50-67, 1953.
- DESCHAMPS, C.J.** Escoamento Laminar através de Válvulas de Compressores. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- DESCHAMPS, C.J., PRATA, A.T. e FERREIRA, R.T.S.** Modelagem de um Escoamento Turbulento em Presença de Estagnação, Recirculação, Aceleração e Gradientes de Pressão Adversos. **Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**. Rio de Janeiro, I: 57-60, 1989.
- DRAZIN, P.G. and REID, W.H.** **Hydrodynamic Stability**. Cambridge University Press, 1981.
- FERREIRA, R.T.S., DESCHAMPS, C.J. and PRATA, A.T.** Pressure Distribution Along Valve Reeds of Hermetic Compressors. **Int. J. Exp. Thermal and Fluid Sciences**. 2: 201-207, 1989.
- FREIRE, A.P.S.** **Introdução à Estabilidade Hidrodinâmica**. Curso de Pós-graduação, UFSC, 1991.
- GASCHE, J. L.** Escoamento Laminar Através de Válvulas Excêntricas de Compressores de Refrigeração. Dissertação de Mestrado, Depto de Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1992.

- GROSS, W.A., MATSCH, L.A., CASTELLI, V., ESHEL, A., VOHR, J.H. and WILDMANN, M. **Fluid Film Lubrification**. Wiley - Interscience, New-York, 1980.
- HAYASE, T., HUMPHREY, C. and GREIF, R. A Consistent Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. **Journal of Computation Physics**. 98: 108-118, 1992.
- HENOU, V., RATHBY, G. D. and THOMPSON, B. E. A Total Pressure Correction for Upstream Weighted Schemes. **Int. J. for Numerical Methods in Fluids**, 9: 855-864, 1989.
- IOSS, G. and JOSEPH, D.D. **Elementary Stability and Bifurcation Theory**. Springer Verlag, New York, 1990.
- ISHIZAWA, S. The Axi-Symmetric Laminar Flow in an Arbitrarily Shaped Narrow Gap (First Report). **Bulletin of the JSME**. 8: 353-367, 1965.
- ISHIZAWA, S. The Axi-Symmetric Laminar Flow in an Arbitrarily Shaped Narrow Gap (Second Report). **Bulletin of the JSME**. 9: 86-103, 1966.
- JOSEPH, D.D. **Stability of Fluid Motions I**. Berlin Heidelberg, Springer Verlag, Vol. I e II, 1976.
- KELKAR, K.M. **Numerical Study of Stability of Fluid Flow**. PhD Thesis, University of Minesota, 1988.
- KELKAR, K.M. and PATANKAR, S.V. Numerical Prediction of Vortex Shedding Behind a Square Cylinder. 1989 National Heat Transfer Conference. HTD Vol.110, **Numerical Heat Transfer with Personal Computers and Supercomputing**. 185-191, 1989.
- KOZLU, H., MIKIC, B.B. and PATERA, A.T. Minimum Dissipation Heat Removal by Scale-Matched Flow Destabilization. **Int. J. Heat Mass Transfer**. 31: 2023-2032, 1988.
- KUBICEK, M. and MAREK, M. **Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures**. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M. **Fluid Mechanics**, Pergamon Press, 1982.

- LANGER, C.A., PRATA, A.T. e FERREIRA, R.T.S. Separação e Bifurcação em Escoamentos em Difusores Radiais. **Anais do 3º Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas**, Itapema, I: 357-362, 1990.
- LANGER, C. A. **Separação, Bifurcação e Transferência de Calor em Escoamentos Radiais**. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1991.
- LANGER, C. A., FERREIRA, R.T.S. e PRATA, A.T. **Escoamento Turbulento através de Válvulas de Compressores**. Relatório de Pesquisa Projeto Embraco, 1993a.
- LANGER, C.A., PRATA, A.T. e FERREIRA, R.T.S. Transferência de Calor em Escoamentos Radiais. **Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Brasília, II: 625-628, 1993b.
- LEONARD, B.P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 19: 59-98, 1979.
- MAJUMDAR, S. Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids. **Numerical Heat Transfer**, part B. 13: 125-132, 1988.
- MALISKA, C.R. **Mecânica dos Fluidos Computacional II**. Curso de Pós-graduação, UFSC, 1990.
- MALISKA, C.R., MARCHI, C.H. e SILVA, A.F.C. Code Validation fo High Speed Flow Simulation over the VLS Launcher Fairing. **AIAA 24th Fluid Dinamics Conference**. Orlando, USA, 01-09, 1993.
- MALISKA, C.R. e MARCONDES, F. Elliptic Calculation s of Natural Convection Flows in Arbitrary Channels. **Proceedings of the 8th International Conference on Laminar and Turbulent Flow**. Swansea, U.K, 388-399, 1993.
- MARCONDES, F. **Solução Numérica do Problema Elíptico da Convecção Natural em Canais Abertos**. Dissertação de Mestrado, Depto. de Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- MARCHI, C.H. Esquemas de Alta Ordem para a Solução de Escoamentos de Fluidos sem Dispersão Numérica. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, XV (3): 231-249, 1993.

- MAUGHAN, J.R. and INCROPERA, F.P. Mixed Convection Heat Transfer with Longitudinal Fins in a Horizontal Parallel Plate Channel: Part I - Numerical Results. **ASME Journal of Heat Transfer**, 112: 612-618, 1990.
- MARPLE, V.A., LIU, B.Y.H. and WHITBY, K.T. Fluid Mechanics of the Laminar Flow. **Aerosol Science**, 5: 1-16, 1974.
- MOCHIZUKI, S. and YAO, M. Flow Separation and Heat Transfer in Radial Flows Between Two Parallel Disks. **Trans. of Japan Society of Mechanical Engineers**. 49: 426-432, 1983.
- MOCHIZUKI, S. and YANG, W.J. Self Sustained Radial Oscillating Flows Between Parallel Disks. **J. Fluid Mechanics**. 154: 377-397, 1985.
- OKAJIMA, A. Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders. **J. Fluid Mechanics**. 123: 379-398, 1982.
- OLIVEIRA, J.C. **Estudo Numérico da Estabilidade Hidrodinâmica em Difusores Radiais**. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1992.
- OLIVEIRA, J.C., PRATA, A.T. e LANGER, C.A. Estabilidade Hidrodinâmica de Escoamentos Radiais. **Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Brasília, II: 1021-1024 1993.
- ORZAG, S.A. Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation. **J. Fluid Mechanics**, 50: 689-703, 1971.
- PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York, Hemisphere Publishing Co, 1980.
- PATANKAR, S.V. A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Irregular Geometries and Conjugate Heat Transfer. **Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.**, Toronto, 3: 297, 1978.
- PATANKAR, S.V. Recent Developments in Computational Heat Transfer. **Journal of Heat Transfer**, 110: 1037-1045, 1988.



- PATERA, A.T. and MIKIC, B.B. Exploiting Hydrodynamic Instabilities. Resonant Heat Transfer Enhancement. **Int. J. Heat Mass Transfer**. 29: 1127-1138, 1986.
- PERIC, M., KESSLER, R. and SCHEUERER, G. Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids. **Computers e Fluids**. 16(4): 389-403, 1988.
- PETERS, S. , PRATA, A.T. and MARCONDES, F. Prandtl Number Effect in Natural Convection in One-Sided Heated Channel. **Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**. Brasília, I: 57-60, 1993.
- PILICHI, C.M. **Determinação Numérica e Experimental de Coeficientes de Transferência de Calor Locais em Difusores Radiais**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1990.
- PRATA, A.T., FERREIRA, R.T.S., PILICHI, C.M. and TODESCAT, M.L. Heat Transfer Enhancements Due to Self-Sustained Flow Oscillations, submetido para publicação, 1992.
- PRATA, A.T. and FERREIRA, R.T.S., Heat Transfer and Fluid Flow Considerations in Automatic Valves of Reciprocating Compressors. **Proceedings of the 1990 International Compressor Engineering Conference**, West Lafayette, USA, I: 512-521, 1990.
- PRATA, A.T., PILICHI, C.M. and FERREIRA, R.T.S. Experiments and Computations on Local Heat Transfer in Radial Flow between Parallel Disks. **Proceedings of the 3rd World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics**, 1026-1033, Honolulu, 1993.
- RAAL, J.D. Radial Source Flow Between Parallel Disks. **J. Fluid Mechanics**. 85(3): 401-16, 1978.
- RAITHBY, G.D. A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow. **Comp. Methods Appl. Mech. Eng.**, 9: 75, 1976a.
- RAITHBY, G.D. Skew Upstream Differencing for Problems Involving Fluid Flow. **Comp. Methods Appl. Mech. Eng.**, 9: 153, 1976b.
- RASBAND, S. **Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems**. John Wiley and Sons, New York, 1990.

- RIFFEL, G. Influência da Fenda de Trabalho e da Lavação das Condições de Operação da Eletroerosão por Faísca, Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica Universidade Federal de Santa Catarina, 1992.**
- ROE, P.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes , J. Comput. Phys. 43: 357-372, 1981.**
- ROE, P.L. Some Contributions to the Modeling of Discontinuous Flows, Proc. AMS/SIAM Seminar, San Diego, 1983.**
- SCHLICHTING, H. Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, 1968.**
- SETTARI, A. and AZIZ, K. A Generalization of the Additive Correction Methods for the Solution of Matrix Equations. SIAM J. Numerical Analysis, 10: 506-521, 1973.**
- SEYDEL, R. From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis. New York, Elsevier Science Publishing Co., 1988.**
- SHAPIRA, M., DEGANI, D. and WEIHS, D. Stability and Existence of Multiple Solutions for Viscous Flow in Suddenly Enlarged Channels. Computers and Fluids. 14: 239-58, 1990.**
- SILVA, A.F.C. Um Procedimento em Volumes Finitos para escoamentos de Qualquer Velocidade. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, 1991.**
- SOBEY, I. J. Observation of waves during oscillatory channel flow. J. Fluid Mechanics. 151: 395-426, 1985.**
- SOBEY, I.J. and DRAZIN, P.G. Bifurcations of Two-Dimensional Channel Flows. J. Fluid Mechanics. 171:263-87, 1986.**
- SOUZA, S.M.A.G.U. Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Colocalizadas no Método dos Volumes Finitos Utilizando Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de Escoamentos de Fluidos. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, 1992.**
- SOUZA, S.M.A.G.U. e MALISKA, C.R. Solução do Problema de Convecção Dominante Utilizando a Função de Interpolação Completa no Método dos Volumes Finitos. Anais do**

**XIV Congresso Iberolatino- Americano de Métodos Computacionais em Engenharia. São Paulo, 673-682, 1993.**

**SPARROW, E.M. and KALEJS, J.P. Local Convective Transfer Coefficients in a Channel Downstream of a Partially Constricted Inlet. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 20: 1241-49, 1977.**

**SWEBY, P.K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21: 995-1001, 1984.**

**TAMAMIDIS, P. and ASSANIS, D. Evaluation of Various High-Order-Accuracy Schemes with and without Flux Limiters. *Int. Journal for Num. Methods in Fluids*, 16: 931-948, (1993).**

**THOMPSON, J.M.T. and STEWART, H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, Chichester, 1986.**

**TODESCAT, M.L. *Transferência de Calor Laminar em Válvulas de Compressores*. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.**

**VAN DOORMAAL, J.P. and RATHBY, G.D. Predicting Incompressible Fluid Flows. *Numerical Heat transfer*, 7: 147-63, 1984.**

## Apêndice A

### SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA ESCOAMENTOS PURAMENTE RADIAIS

#### A.1 - Introdução

O objetivo deste Apêndice é verificar o comportamento dos esquemas numéricos utilizados no presente trabalho (conforme resumido no final do capítulo 4) para dois casos limites do escoamento puramente radial (figura A.1): escoamento a baixíssimo número de Reynolds ( $Re$ ) e o escoamento invíscido. É esperado que o esquema que produzir bons resultados, para estes dois casos, deve comportar-se da mesma forma para situações intermediárias, com  $Re$  moderados, visto que a discretização dos termos de inércia, de pressão e viscosos estará sendo bem feita.

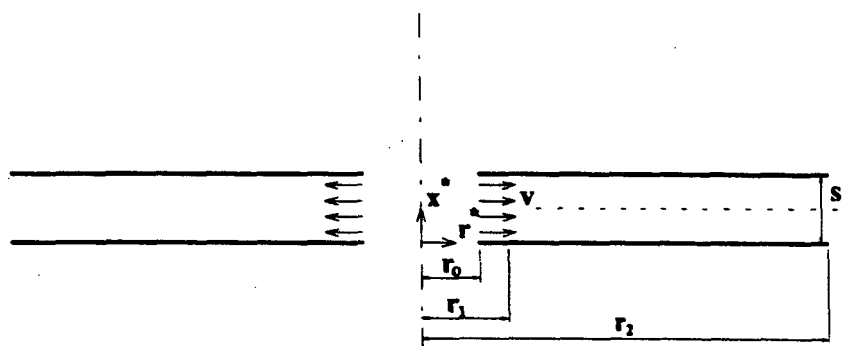


Figura A.1 - Geometria do escoamento radial.

Neste apêndice são deduzidas expressões para a velocidade radial e pressão nos casos limites citados. A velocidade transversal é nula, pois nos casos limites citados o problema pode ser tratado de forma unidimensional.

Os resultados numéricos foram obtidos utilizando-se a mesma malha empregada no decorrer do capítulo 6, ou seja, 60x90 pontos nodais. A razão  $S = s/r_1$  adotada aqui é a mesma que a do trabalho de Langer (1991),  $S = 2$ , e as posições radiais adimensionais de início e fim do domínio computacional são 1 e 20, respectivamente.

## A.2 - Escoamento a baixíssimo Re

Neste caso as equações governantes do escoamento radial, dadas pelas expressões (6.1-3), são simplificadas devido à predominância fortíssima dos termos difusivos. Assim, tem-se,

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Conservação da quantidade de movimento linear na orientação radial:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{A.2})$$

No caso específico do Modelo 3, tem-se as equações de conservação para as componentes U e  $V_r$ , onde  $V_r$  é igual ao produto  $rV$ . Neste caso tem-se,

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Conservação da quantidade de movimento linear na orientação radial:

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

As equações anteriores são sujeitas às seguintes condições de contorno,

$$V(x=0)=0 \quad , \quad V(x=S)=0 \quad , \quad \bar{V}(r=1)=1$$

onde  $\bar{V}$  é a velocidade média em  $r=1$ , avaliada a partir de um perfil parabólico para velocidade radial e  $S=2$ .

As seguintes adimensionalizações são utilizadas,

$$V = \frac{V^*}{\bar{V}_1}, \quad x = \frac{x^*}{r_1^*}, \quad r = \frac{r^*}{r_1^*}, \quad P = \frac{P^*}{\rho \bar{V}_1^2} \quad \text{e} \quad Re = \frac{\bar{V}_1 r_1^*}{\nu}$$

Em escoamentos com fluidos muito viscosos os termos de inércia são desprezíveis e a velocidade transversal  $U$  é nula. Em decorrência da equação da continuidade resultante, o termo difusivo na direção radial também se anula.

As equações (A.1) e (A.2), ou (A.3) e (A.4), podem ser resolvidas por separação de variáveis, fornecendo,

$$V = -\frac{6}{r} \left[ \left( \frac{x}{S} \right)^2 - \left( \frac{x}{S} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

e,

$$P - P_{\text{ref}} = -\frac{12}{Re \cdot S^2} \ln \left( \frac{r}{r_{\text{ref}}} \right) \quad (\text{A.6})$$

onde  $P_{\text{ref}}$  é definido em  $r_{\text{ref}} = 1$ , com  $P_{\text{ref}} = 0$ .

A seguir apresenta-se uma comparação entre as soluções analítica e numérica, obtidas com os Modelos 1, 2 e 3 apresentados no capítulo 4, para escoamento puramente difusivo. As soluções numéricas foram obtidas para  $Re = 10^{-9}$ , o que simula um número de Reynolds nulo.

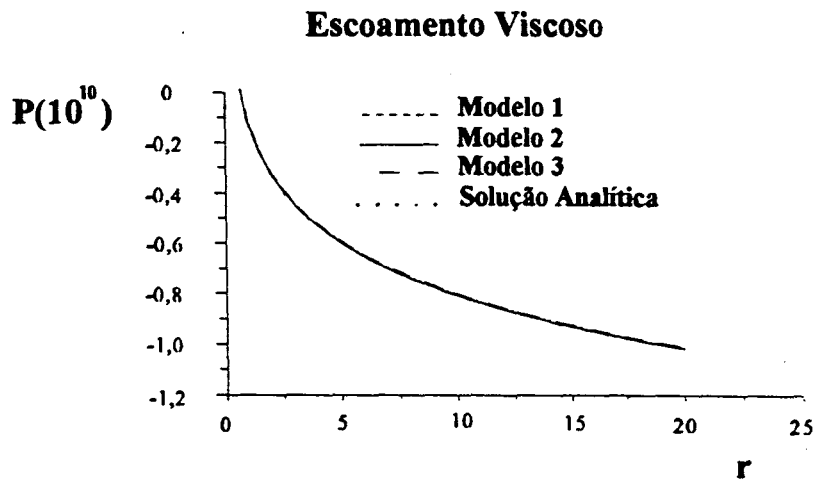


Figura A.2 - Distribuição radial de pressão para o escoamento viscoso no difusor radial.

Nota-se na figura A.2 que todas as formulações concordam bem com a solução analítica no caso de escoamento puramente viscoso. Este resultado já era esperado e tinha sido obtido por Langer (1991) com a formulação proposta por Patankar (1980).

### A.3 - Escoamento Inviscido

Para um escoamento potencial entre placas planas, o perfil da velocidade radial  $V$  é assumido plano, ou seja, uniforme ao longo da direção transversal  $x$ .

O comportamento de  $V$  na direção radial pode ser obtido através de um balanço de massa, sabendo que a velocidade média na entrada do difusor é dada por  $\bar{V}(r_1 = 1) = 1$ .

$$r \int_{x=0}^{x=S} V(r) dx = \bar{V}(r_1) r_1 S \quad (\text{A.7})$$

de onde resulta

$$V = 1/r \quad (\text{A.8})$$

No caso do escoamento inviscido em regime permanente é válida a equação de Bernoulli,

$$P + V^2 / 2 = P_{\text{ref}} + V_{\text{ref}}^2 / 2 \quad (\text{A.9})$$

Substituindo os valores de referência:  $P_{\text{ref}} = 0$  e  $V_{\text{ref}} = 1$  em  $r_{\text{ref}} = 1$ , tem-se

$$P = (1/2)(1 - 1/r^2) \quad (\text{A.10})$$

A seguir apresenta-se um confronto entre soluções numéricas e solução analítica obtidas para escoamento radial a altíssimo número de Reynolds. Utilizaram-se os Modelos 1, 2 e 3 e simulou-se um escoamento inviscido fazendo-se o uso de um número de Reynolds muito alto,  $Re = 10^9$ , além de permitir o deslizamento do fluido junto a parede sólida. Tais resultados são apresentados na figura A.3.

### Escoamento Invíscido

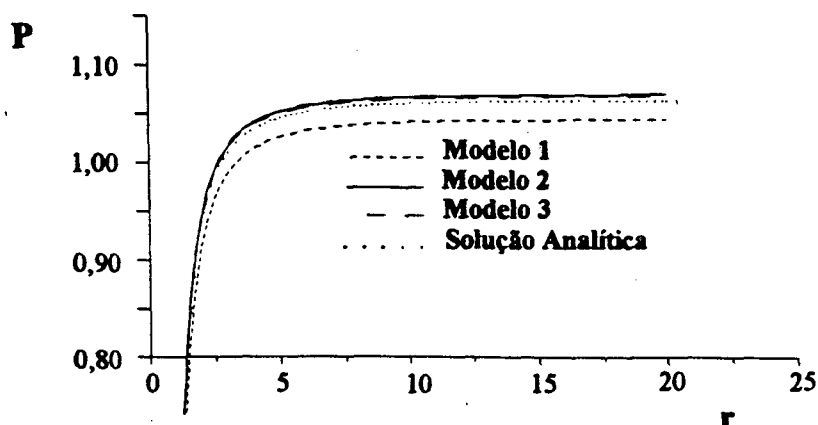


Figura A.3 - Distribuição radial de pressão para o escoamento invíscido em difusor radial.

Nota-se que a distribuição de pressão obtida com o Modelo 1 é inferior aos resultados analíticos, diferindo em cerca de 3%. Tal conclusão é análoga aos casos limites testados por Langer (1991), ou seja, em virtude da expansão na área de passagem do fluido não ocorre recuperação completa da pressão com o uso do esquema da Lei da Potência (Modelo 1).

A validade da aplicação de um função de interpolação tipo Lei da Potência a escoamentos puramente radiais tem sido questionada. Na verdade esta função de interpolação apresenta problemas para altos valores de número de Reynolds, onde o valor da componente radial interpolada na face do V.C. torna-se o valor à montante da mesma (esquema Upwind). Desta forma a velocidade interpolada não está considerando que no escoamento radial ocorre uma queda no valor da velocidade radial devida à expansão na área de passagem do fluido. Assim, tem-se um erro no esquema numérico com esta interpolação, que é proveniente de uma aproximação unidimensional e não leva em conta variações de área. Baseado nestes fatos procurou-se estabelecer novas formas de interpolação visando a inclusão da variação da área na função de interpolação e, para isto, adotou-se a interpolação quadrática à montante da face onde se quer interpolar uma componente de velocidade, denominada de QUICK consistente, Hayase et alli (1992). Tal esquema foi empregado nos modelos 2, 3 e 4 e está detalhado no Apêndice B.

Conclui-se que os Modelos 2 e 3, baseados na função de interpolação QUICK consistente, são os melhores para captar distribuições de pressão ao longo da direção radial. Com estes modelos consegue-se recuperar toda a energia mecânica associada ao escoamento, devido a uma recuperação completa de pressão. A distribuição de pressão obtida numericamente é cerca de 1% maior que a distribuição obtida analiticamente.

Durante a evolução do presente trabalho surgiu a necessidade de implementação dos Modelos 4 (QUICK) e 5 (MSOU), baseados em malha desencontrada. Tais modelos foram aplicados no caso limite mais crítico de escoamento invíscido e forneceram distribuições de pressão análogas as obtidas com o Modelo 2 (QUICK). Tais resultados não foram incluídos na



figura A.2 por serem muito próximos dos obtidos com os modelos 2 e 3 em malha colocizada e, desta forma, não se teria nitidez para se distinguir 4 curvas praticamente coincidentes.

Conclui-se, então, que as interpolações ditas mais precisas, como QUICK (terceira ordem\*) e MSOU (segunda ordem\*), são superiores ao esquema de primeira ordem\* como Lei da Potência e Upwind, pelo menos nos casos limites.

\* - Ordem, no presente trabalho, é definida pelo maior termo desprezado na série aproximadora da interpolação, segundo convenção de Tamamidis e Assanis (1993).

## **Apêndice B**

### **EXTENSÃO DA INTERPOLAÇÃO QUICK CONSISTENTE PARA MALHAS NÃO-UNIFORMES**

#### **B.1 - Introdução**

Na integração dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes surge a necessidade da avaliação das variáveis  $\phi$  ( $= U, V, T \dots$ ) nas faces dos volumes de controle V.C. Este procedimento é conhecido como "interpolação de  $\phi$  nas faces" e pode ser feita de diversas formas. A maneira mais conhecida é aquela proposta por Patankar (1980), onde se resolve uma equação de conservação da quantidade de movimento simplificada, fazendo-se um balanço unidimensional na direção de interesse. A partir da solução desta equação se avalia o valor de  $\phi$  nas faces do V.C. de cada direção dos eixos de coordenadas. Esta forma de interpolação apresenta alguns problemas, que se tornam críticos para o caso do escoamento na direção radial conforme explorado no capítulo 6.

Um esquema alternativo é conseguido através de uma interpolação quadrática para o valor de  $\phi$  na face, que é obtido através dos seus vizinhos na direção considerada. Esquemas que utilizam interpolação quadrática são conhecidos como QUICK, Leonard (1979) e Hayase et alli (1992). Hayase apresenta um esquema de interpolação quadrática que satisfaz as quatro regras básicas, que dão consistência ao método dos volumes finitos. Tais regras asseguram os princípios de conservação às equações discretizadas e permitem uma convergência estável para a solução iterativa do sistema de equações algébricas gerado. Hayase et alli (1992) propõem uma interpolação quadrática para faces igualmente espaçadas dos V. C., sempre tomando dois pontos à montante e um ponto à jusante desta face.

#### **B.2 - Extensão da metodologia para malhas não uniformes**

Neste apêndice apresenta-se uma extensão do trabalho de Hayase para faces de V.C. não igualmente espaçadas em uma malha genérica, onde  $\phi$  pode ser U, V ou qualquer outra variável armazenada no mesmo ponto. Presentemente tem-se malhas com grandes diferenças entre espaçamentos vizinhos, e por isso é necessária esta adaptação do esquema proposto por Hayase.

O valor de  $\phi_e$ , variável na face "e" ('este') do V.C.  $i$ , será calculado a seguir para exemplificar a interpolação QUICK em uma das quatro faces do V.C. Avaliar-se-á o valor de  $\phi_e$  de duas maneiras diferentes de acordo com o sentido do fluxo convectivo  $Fe$  existente nesta face, conforme figura B.1.

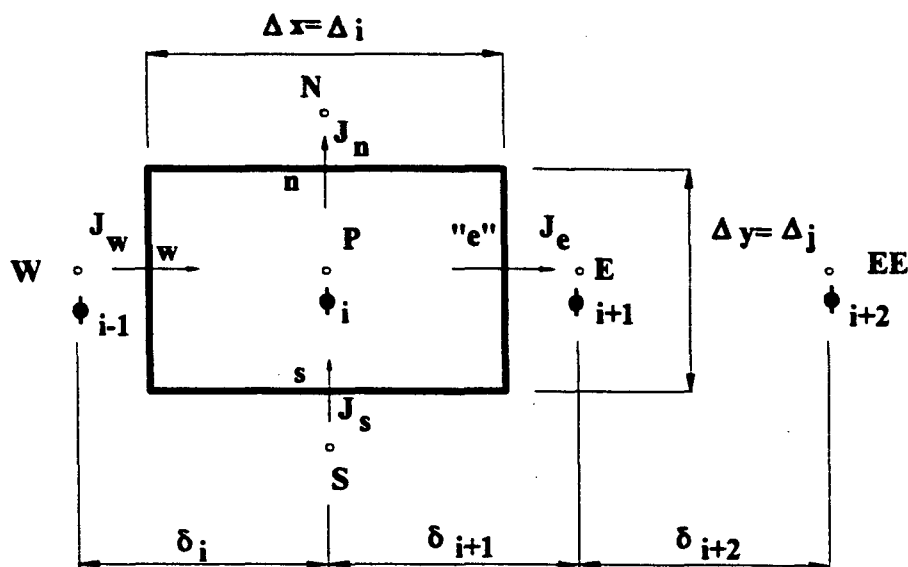


Figura B.1 - Volume de controle para a variável  $\phi_i$ .

Para  $Fe > 0$ , denotado por  $Fe^+$ , tem-se

$$\phi(x) = \phi_i + Ax^2 + Bx + C = \phi_i + f(\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, x) \quad (B.1)$$

Calculando-se os coeficientes A, B e C do polinômio interpolador em termos da geometria apresentada na figura B.1, e avaliando-se  $\phi(x)$  na face "e", tem-se a seguinte expressão:

$$\phi_e^+ = \phi_i + S_e^+ \quad (B.2)$$

onde

$$S_e^+ = (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{\Delta_i(\Delta_i + 2\delta_i)}{4\delta_{i+1}(\delta_i + \delta_{i+1})} - (\phi_i - \phi_{i-1}) \frac{\Delta_i(\Delta_i - 2\delta_{i+1})}{4\delta_i(\delta_i + \delta_{i+1})} \quad (B.3)$$

Para  $Fe < 0$ , denotado por  $Fe^-$ , tem-se

$$\phi(x) = \phi_{i+1} + Ax^2 + Bx + C = \phi_{i+1} + f(\phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}, x) \quad (B.4)$$

Calculando-se os coeficientes A, B e C do polinômio interpolador e avaliando-se  $\phi(x)$  na face "e" tem-se a seguinte expressão:

$$\phi_e^- = \phi_{i+1} + S_e^- \quad (\text{B.5})$$

onde

$$S_e^- = (\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+1} - 2\delta_{i+1})}{4\delta_{i+2}(\delta_{i+1} + \delta_{i+2})} - (\phi_{i+1} - \phi_i) \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+1} + 2\delta_{i+2})}{4\delta_{i+1}(\delta_{i+1} + \delta_{i+2})} \quad (\text{B.6})$$

As equações (B.2) e (B.5) apresentam a expressão para o valor de  $\phi$  na face "e" em função do valor de  $\phi$  a montante deste e de uma função que utiliza dois vizinhos nodais a montante e um vizinho nodal a jusante. O valor de  $\phi$  a montante da face em questão é que será usado na discretização implícita dos termos convectivos, analogamente ao esquema de interpolação Upwind de primeira ordem ( $\phi$  implícito). A função que utiliza os dois vizinhos nodais à face é avaliada explicitamente em termos dos valores da iteração anterior e é incorporada ao termo fonte  $Sc$  de cada equação discretizada. Portanto, no esquema de Hayase et alli (1992), separa-se o valor  $\phi$  interpolado em cada face: uma parcela ( $\phi_i$  ou  $\phi_{i+1}$ ) é tratada implicitamente como se fosse um esquema Upwind de primeira ordem, e outra parcela, no caso  $S_e^+$  ou  $S_e^-$ , é tratada explicitamente como um termo fonte.

A seguir apresenta-se um exemplo unidimensional de discretização com interpolação QUICK consistente para a variável  $\phi$  genérica,

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \quad (\text{B.7})$$

Integrando-se a eq. (B.7) no V.C. i conforme figura B.1 tem-se,

$$(\rho u \Delta y \phi)_e - (\rho u \Delta y \phi)_w = \Gamma \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_e \Delta y - \Gamma \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_w \Delta y + b \Delta x \Delta y \quad (\text{B.8})$$

que é equivalente a,

$$Fe \cdot \phi_e - Fw \cdot \phi_w = De \cdot (\phi_{i+1} - \phi_i) - Dw \cdot (\phi_i - \phi_{i-1}) + Sc \quad (\text{B.9})$$

onde

$$Fe = \rho u_e \Delta y, \quad Fw = \rho u_w \Delta y, \quad De = \Gamma_e \Delta y / \Delta x, \quad Dw = \Gamma_w \Delta y / \Delta x \quad \text{e} \quad Sc = b \Delta x \Delta y.$$

O fluxo convectivo,  $Fe$ , por exemplo, é avaliado conforme o sentido da velocidade nas faces. Assim,

$$Fe \cdot \phi_e = Fe^+ \cdot \phi_e^+ + Fe^- \cdot \phi_e^- \quad (B.10)$$

onde

$$Fe^+ = \begin{cases} \rho u_e \Delta y & (u_e > 0) \\ 0 & (u_e < 0) \end{cases} \quad e \quad Fe^- = \begin{cases} 0 & (u_e > 0) \\ \rho u_e \Delta y & (u_e < 0) \end{cases} \quad (B.11)$$

Substituindo-se as expressões correspondentes de cada fluxo convectivo das faces (eq. B.10) na eq. (B.9), tem-se

$$[Fe^+ \cdot \phi_e^+ + Fe^- \cdot \phi_e^-] - [Fw^+ \cdot \phi_w^+ + Fw^- \cdot \phi_w^-] = De(\phi_{i+1} - \phi_i) - Dw(\phi_i - \phi_{i-1}) + Sc \quad (B.12)$$

Substituindo-se as eqs. (B.2) e (B.5) correspondentes a  $\phi_e$ , e as equações análogas correspondentes a  $\phi_w$ , na eq. (B.12) vem

$$[Fe^+ \cdot \phi_i + Fe^- \cdot \phi_{i+1}] - [Fw^+ \cdot \phi_{i-1} + Fw^- \cdot \phi_i] = De(\phi_{i+1} - \phi_i) - Dw(\phi_i - \phi_{i-1}) + \\ + Sc - Fe^+ \cdot S_e^+ - Fe^- \cdot S_e^- + Fw^+ \cdot S_w^+ + Fw^- \cdot S_w^- \quad (B.13)$$

Na equação (B.13) separam-se os valores de  $\phi$  que são avaliados implicitamente, mantendo-os junto aos fluxos convectivos  $Fe$  e  $Fw$ . As parcelas correspondentes a  $S_e$  e  $S_w$  são avaliadas explicitamente juntamente com o termo fonte  $Sc$ .

Desta forma a interpolação de  $\phi$  via esquema QUICK consistente, proposta por Hayase et alli (1992), se reduz ao esquema que toma o valor de  $\phi$  à montante (análoga ao esquema Upwind de primeira ordem) com um termo fonte extra para cada direção do escoamento. O termo fonte  $S_x$ , resultante da interpolação na direção  $x$ , é o seguinte:

$$S_x = -Fe^+ \cdot S_e^+ - Fe^- \cdot S_e^- + Fw^+ \cdot S_w^+ + Fw^- \cdot S_w^- \quad (B.14)$$

No caso de escoamentos bidimensionais têm-se os termos fontes extras  $S_x$  e  $S_y$ , e para os escoamentos tridimensionais têm-se os termos fontes  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$ , que apresentam formas análogas à equação (B.14).

Para discretizações em "malha colocizada" tem-se uma instabilidade numérica, que segundo Hayase et alli (1992), é devida à interpolação quadrática de  $\phi$  nas faces dos V.C. do contorno do domínio de cálculo, decorrente da aproximação de terceira ordem\* usada na interpolação QUICK. Tal instabilidade se deve à necessidade de se ter um ponto nodal fora do

domínio de cálculo para se obter a aproximação de terceira ordem para  $\phi$  nas faces. Conforme a figura B.2, tem-se um ponto nodal sobre o contorno do domínio, mas para uma interpolação mais suave de  $\phi$ , seria melhor ter-se um ponto nodal fora do domínio de cálculo ( $\phi_1$ ) (um ponto fictício), para se obter um espaçamento mais uniforme. Deve-se notar que  $\delta_2$  é da ordem da metade de  $\delta_3$ , e que o V.C. do contorno para malha colocada está situado na região marcada com hachuras.

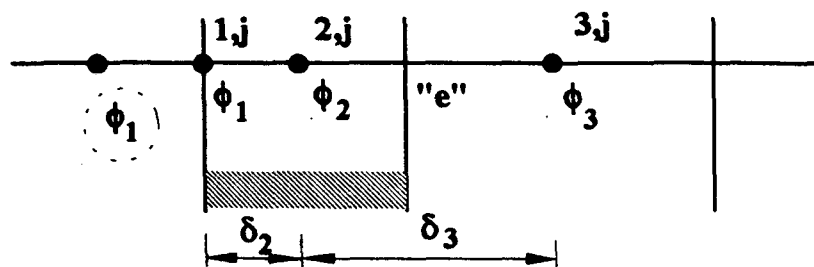


Figura B.2 - V.C. no contorno do domínio de solução para malha colocada.

Este procedimento pode gerar um valor de  $\phi$  na face "e" que não se situa entre os valores dos pontos nodais vizinhos, indicando uma inconsistência nesta interpolação. Este problema também pode surgir em faces internas ao domínio de cálculo, quando existem altos gradientes de  $\phi$ . Tal problema pode ser superado usando-se os chamados limitadores de fluxos (vide Apêndice C), mas uma maneira trivial de superar este problema nos contornos é fazer-se uma outra aproximação para estes valores de  $\phi$  nas faces, normalmente adota-se uma interpolação linear para  $\phi$  nestas faces dos V.C. dos contornos. Esta interpolação linear é a celebrada "Diferença Central".

Para discretizações em malha desencontrada, tem-se uma situação amenizada em relação a malha colocada, pois as componentes de velocidade perpendiculares ao contorno são armazenadas nas faces dos V.C., conforme indicado na figura B.3, onde existe um espaçamento da mesma ordem dos volumes internos ao domínio. Nos contornos do domínio existem os chamados V.C. expandidos (Patankar, 1980) que compreendem a região delimitada por hachuras. Na figura B.3 a componente  $U(3,j)$  corresponde a um V.C. expandido de contorno,

\* - A ordem das aproximações adotadas por Hayase (1992) é definida como a ordem do maior termo desprezado na série aproximadora.

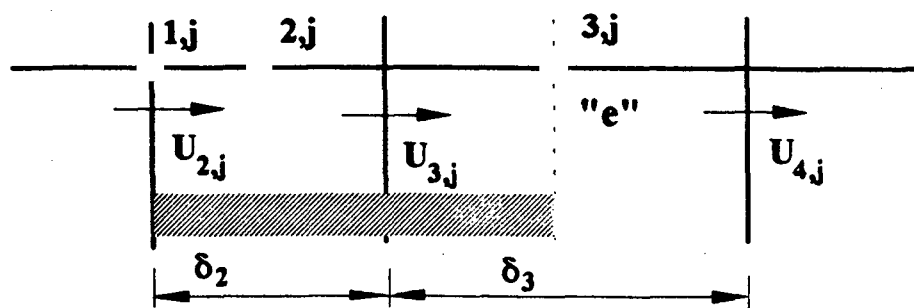


Figura B.3 - V.C. no contorno do domínio de solução, para a componente U de velocidade em malha desencontrada.

Desta forma pode-se utilizar para a componente perpendicular à face interpolada uma interpolação idêntica a dos pontos nodais internos. No caso da figura B.3, procede-se normalmente para a componente U interpolada na face "e". Usa-se porém o artifício da interpolação por Diferença Central para a interpolação de U na outra direção, ou seja, a direção vertical nos V.C. junto ao contorno inferior e superior. Para a componente V procede-se de modo análogo: interpolação normal na direção vertical, junto aos contornos inferior e superior, e interpolação por Diferença Central na direção horizontal junto aos contornos esquerdo e direito.

Esta aproximação no contorno do domínio de cálculo em malha desencontrada têm sido numericamente mais estável do que este mesmo procedimento em malha colocada.

## Apêndice C

### EXTENSÃO DA INTERPOLAÇÃO MSOU PARA MALHAS NÃO UNIFORMES

#### C.1 - Introdução

O esquema de interpolação MSOU ("Monotonic Second Order Upwind") apresentado por Tamamidis e Assanis (1993), é uma variação da interpolação SOU ("Second Order Upwind" - Upwind de segunda ordem). A interpolação SOU consiste na extrapolação linear a partir de dois pontos nodais a montante da face onde se quer o valor interpolado, enquanto o esquema Upwind de primeira ordem tradicional é feito tomando-se o próprio valor vizinho a montante da face interpolada. Roe (1981 e 1983) desenvolveu este esquema monotônico que foi mais tarde estendido por Chakravarthy e Osher (1985) para uma nova classe de esquema TVD (Total Variation Diminishing). Estes esquemas são baseados em soluções aproximadas de Riemann e foram originalmente desenvolvidos para a interpolação de escoamentos incompressíveis invíscidos, com fortes choques. Sweby (1984) converteu a função de transferência de Roe para uma função com limitador de fluxo. Assim, o esquema SOU pode ser transformado em monotônico seguindo-se o procedimento de Sweby. O resultado desta combinação de metodologias, apresentado por Tamamidis e Assanis (1993), é um esquema classificado como ENO (Essentially Non-Oscillatory), que consiste em um esquema SOU com fluxo na face interpolada limitado aos valores dos vizinhos a montante e a jusante desta face.

A seguir apresenta-se uma extensão deste esquema MSOU, para uma malha genérica não-uniforme, conforme figura C.1.

#### C.2 - Extensão da metodologia para malhas não uniformes

No presente apêndice apresenta-se uma extensão do trabalho de Tamamidis e Assanis para faces de V.C. não igualmente espaçadas. A seguir exemplifica-se esta extensão para a interpolação da variável  $\phi$  na face "e", analogamente ao procedimento feito para interpolação QUICK consistente no Apêndice B.

Naturalmente, os parâmetros geométricos  $\Delta_i$  e  $\delta_i$  são diferentes daqueles apresentados na figura B.1 para malha colocizada.



O valor de  $U_e$ , variável na face "e" (este) do V.C.  $i$ , é calculado de duas maneiras diferentes de acordo com o sentido do fluxo convectivo  $Fe$  existente nesta face, conforme figura C.1, analogamente à interpolação QUICK. Neste caso  $\phi$  representará aqui o valor da velocidade  $U$  desenhontrada.

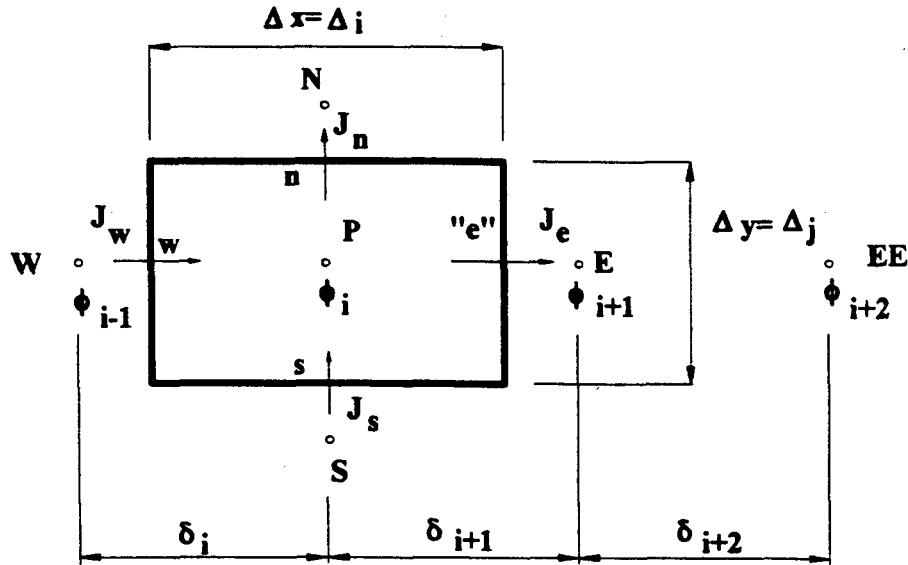


Figura C.1 - V.C. para  $\phi_i = U_i$  em malha desenhontrada.

Para  $Fe > 0$ , denotado por  $Fe^+$ , tem-se

$$\phi(x) = \phi_i + Ax + B = \phi_i + f(\phi_{i-1}, \phi_i, x) \quad (C.1)$$

Calculando-se os coeficientes A e B do extrapolador linear e avaliando-se  $\phi$  na face "e", tem-se a seguinte expressão,

$$\phi_e^+ = \phi_i + S_e^+ \quad (C.2)$$

na qual

$$S_e^+ = \frac{\delta_{i+1}}{2\delta_i} (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) \varphi_{i,j}^+ \quad (C.3)$$

onde,

$$\varphi_{i,j}^\pm = \text{Max}\{0, \text{Min}(2r_{i,j}^\pm, 1), \text{Min}(r_{i,j}^\pm, 2)\} \quad (C.4)$$

e

$$r_{i,j}^+ = \frac{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})/\delta_{i+1}}{(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j})/\delta_i} \quad e \quad r_{i,j}^- = \frac{(\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})/\delta_{i+1}}{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j})/\delta_{i+2}} \quad (C.5)$$

Para  $Fe < 0$ , denotado por  $Fe^-$ , tem-se

$$\phi(x) = \phi_{i+1} + Ax + B = \phi_{i+1} + f(\phi_{i+1}, \phi_{i+2}, x) \quad (C.6)$$

Calculando-se os coeficientes A e B do extrapolador e avaliando  $\phi$  na face "e" tem-se a seguinte expressão,

$$\phi_e^- = \phi_i + S_e^- \quad (C.7)$$

onde

$$S_e^- = -\frac{\delta_{i+1}}{2\delta_{i+2}} (\phi_{i+2,j} - \phi_{i+1,j}) \varphi_{i,j}^- \quad (C.8)$$

e  $\varphi_{i,j}^-$  é dado pela mesma eq. (C.4). A função  $\varphi_{i,j}$  é o limitador do fluxo nas interfaces dos V.C. definido por Roe (1983) e tem por função cancelar o excesso do valor extrapolado em relação às faces vizinhas, não permitindo valor superior ou inferior aos vizinhos nodais da face.

As equações (C.2) e (C.7) apresentam a forma para o valor de  $\phi$  na face "e" em função dos dois vizinhos nodais a montante da face. O valor imediatamente a montante da face em questão é que será usado para a discretização implícita dos termos convectivos, analogamente ao esquema de interpolação Upwind de primeira ordem e QUICK apresentado na Apêndice B. Os valores da função que utiliza os vizinhos nodais de  $\phi$  na face,  $Se^+$  e  $Se^-$ , são avaliados explicitamente em função dos valores da iteração anterior e são incorporados ao termo fonte  $Sc$  de cada equação discretizada. Deste ponto em diante tem-se uma discretização idêntica à interpolação QUICK apresentada no Apêndice B, faltando apenas a interpolação de  $\phi$  nas faces da direção y.

Neste momento também é importante registrar as diferenças que ocorrem entre a discretização em malha colocada e desencontrada nas regiões de fronteira do domínio de cálculo. Conforme citado no Apêndice B, as fronteiras da malha colocada necessitariam de um ponto nodal externo ao domínio de cálculo, para que a interpolação nas faces fosse mais suave. Já no caso da malha desencontrada tem-se situações distintas para cada componente de velocidade, conforme figuras B.2 e B.3. A componente perpendicular à parede apresenta uma distribuição nos contornos idêntica ao domínio interno, enquanto que a componente paralela à parede apresenta comportamento idêntico à distribuição em malha colocada. Por isso, tratam-se as componentes perpendiculares indiferentemente no contorno ou no domínio interno. Já as componentes paralelas,

que necessitariam de um ponto externo inexistente, são tratadas pelo esquema de Diferença Central, onde o valor da face é calculado pela média aritmética entre os vizinhos nodais.

## Apêndice D

### DISCRETIZAÇÃO EM MALHA COLOCALIZADA

#### D.1 - Introdução

Tradicionalmente a solução numérica de problemas de Transferência de Calor e de Mecânica dos Fluidos, através do método dos Volumes Finitos, envolve o uso de esquemas ditos desencontrados (Patankar, 1980). Nestes esquemas a pressão e as componentes do vetor velocidade são armazenados em posições diferentes na malha computacional. As componentes de velocidade são armazenadas nas faces do volume de controle associado ao ponto nodal correspondente à pressão. Apesar do uso de um esquema colocalizado simplificar muito a programação e a implementação de um algoritmo numérico, até o início da década de 80, desaconselhava-se fortemente o seu uso em problemas envolvendo escoamentos incompressíveis. Patankar (1980) argumenta que com o uso de um esquema colocalizado o acoplamento Pressão-Velocidade fica debilitado, dando margem ao surgimento de soluções oscilatórias (espúrias) para os campos de pressão e de velocidade. Somente no início dos anos 80 conseguiu-se contornar o problema do desacoplamento entre pressão e velocidade existente no esquema colocalizado.

Peric et alli (1988) fazem uma breve apresentação dos primeiros trabalhos que apresentaram e utilizaram a nova técnica e mostram uma comparação entre resultados obtidos com os esquemas desencontrado, colocalizado e resultados experimentais para diferentes escoamentos. Peric et alli (1988) concluem que ambos esquemas fornecem resultados numéricos muito semelhantes. Eventuais diferenças encontradas entre eles são muito menores que a diferença de ambos em relação aos resultados experimentais.

Com o uso crescente da nova técnica foram observados problemas adicionais a serem resolvidos, para que se pudesse então confiar nos resultados numéricos obtidos com um esquema colocalizado, tanto quanto um esquema desencontrado. Em particular, as variantes do esquema colocalizado proposto no início da década passada apresentam uma dependência das soluções numéricas com: o coeficiente de relaxação ( $\alpha$ ) e o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ). Essa dependência tem sido constatada por diversos autores, como por exemplo Patankar (1988).

Para o cálculo de escoamentos incompressíveis estacionários, normalmente não há necessidade de se utilizar um intervalo de tempo  $\Delta t$  pequeno como forma de convergir a solução numérica, a menos que se queira obter um processo transiente distorcido como forma de estabilizar o processo iterativo. Neste caso pode-se eliminar os termos temporais das equações discretizadas e recorrer-se ao uso de coeficientes de relaxação para convergir a solução numérica.

Assim evita-se a dependência em relação ao  $\Delta t$ . Permanece somente a dependência em relação a relaxação  $\alpha$ . Esta entretanto já foi solucionada Majumdar (1988) apresenta de forma clara a origem desta dependência e propõe uma solução para o problema. O esquema colocalizado modificado, conforme a sugestão de Majumdar, não apresenta a dependência das soluções numéricas em relação a  $\alpha$ .

Entretanto, para escoamentos em regime não permanentes, o problema da dependência da solução em relação ao  $\Delta t$  ainda persiste. Com o interesse crescente no estudo de escoamentos não estacionários, periódicos ou não, deve-se buscar novas técnicas que eliminem a dependência do esquema colocalizado em relação ao intervalo de tempo. Somente assim pode-se usufruir dos benefícios do esquema colocalizado, sem suspeitas sobre a solução numérica obtida. Após uma revisão cuidadosa constatou-se que inexistem trabalhos apresentando alguma variação do esquema colocalizado que forneça a almejada independência em relação a  $\Delta t$ .

O presente apêndice pretende revisar os esquemas colocalizados de Peric et alli (1988) e de Majumdar (1988) e introduzir um novo esquema que forneça soluções numéricas independentes tanto do coeficiente de relaxação quanto do intervalo de tempo.

## D.2 - Método Colocalizado

Assim como no método dos volumes finitos proposto por Patankar (1980) (para um esquema desconstruído), divide-se o domínio de solução em uma série de volumes de controle elementares, não sobrepostos, e integram-se as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento ao longo de cada um desses volumes de controle.

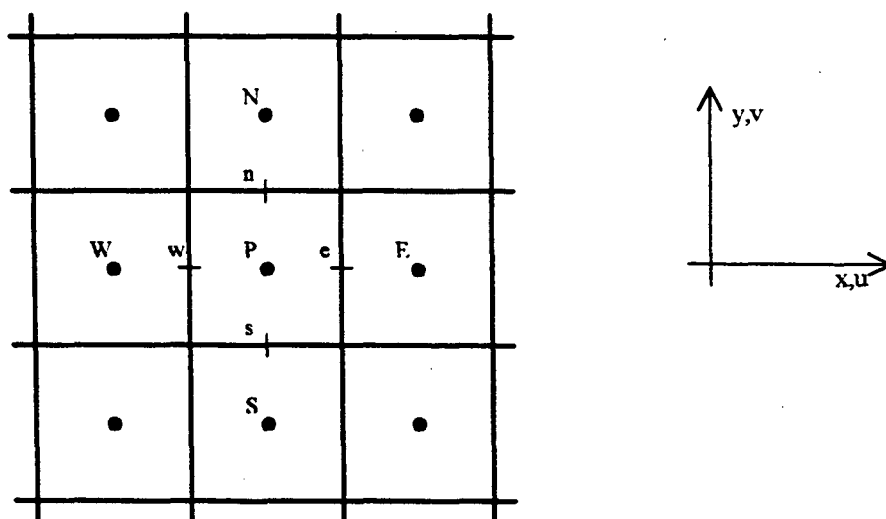


Figura D.1 - Volumes de controle elementares.

Do processo de integração resultam equações discretizadas para cada volume elementar. Por exemplo, a equação de conservação da quantidade de movimento na direção  $x$ , discretizada para o volume de controle  $P$ , toma a forma a seguir:

$$(A_P/\alpha)U_P^{k,t} = \sum A_{viz}U_{viz}^{k,t} + (1-\alpha)(A_P/\alpha)U_P^{k-1,t} + A_P^0U_P^{t-\Delta t} + S_C - \frac{Vol_P}{\delta_{ew}}(P_e - P_w) \quad (D.1)$$

onde:

$k$ : nível iterativo ( $k$  = iteração nova,  $k-1$  = iteração passada),

$t$ : nível de tempo ( $t$  = tempo novo,  $t-\Delta t$  = tempo passado),

$U_P$ : velocidade nodal em  $P$ ,

$U_{viz}$ : velocidades vizinhas ao nó  $P$  ( $U_w, U_e, U_s, U_n$ ),

$A_P = (A_P^+ + A_P^0)$ ;

$A_P^+ = A_w + A_e + A_s + A_n + S_P$

$A_{viz}$ : coeficientes de influência das velocidades vizinhas sobre  $U_P$  ( $A_w, A_e, A_s, A_n$ )

$S_P, S_C$ : termos fonte,

$A_P^0 = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$ ,

$\alpha$ : coeficiente de sub-relaxação,

$Vol_P$ : Volume associado ao nó  $P$ ,

$\delta_{ew}$ : distância da face ( $e$ ) até a face ( $w$ ) e

$P_e, P_w$ : interpolações lineares das pressões nas faces ( $e$ ) e ( $w$ ), respectivamente.

Neste ponto tem-se apenas as equações para atualizar as componentes de velocidade  $U$  e  $V$  nodais, a partir da integração das equações de conservação da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para atualizar o campo de pressões usa-se a equação de conservação da massa, através de um acoplamento iterativo semelhante ao SIMPLE. Para isso é necessário calcular-se as velocidades nas faces dos volumes de controle.

Estas velocidades nas faces são calculadas por interpolação a partir das velocidades dos pontos nodais vizinhos. Esse cálculo é o calcanhar de Aquiles do método colocalizado. Todas as deficiências do esquema colocalizado, que prejudicam a sua generalização, surgem no instante de avaliar-se as velocidades nas faces. A interpolação será mostrada em detalhe para a velocidade na face ( $e$ ),  $U_e$ .

A primeira idéia que surge é interpolar linearmente as velocidades nas faces a partir das velocidades nodais disponíveis. Na figura D.2,  $\bar{U}$  representa a velocidade interpolada na face ( $e$ ) através das velocidades nos pontos nodais  $P$  e  $E$ . Entretanto, essa prática não é aconselhável, uma vez que a mesma permite o surgimento de um campo oscilatório de pressões ("checkerboarding"), conforme exposto por Patankar (1980).

Uma maneira encontrada para evitar o problema do campo oscilatório de pressão é utilizar a equação de conservação da quantidade de movimento para interpolar a velocidade na face. Reescreve-se a equação (D.1), para os nós P e E, como:

$$U_P^{k,t} = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + (1-\alpha)(A_P/\alpha)U_P^{k-1,t} + A_P^0 U_P^{t-\Delta} + S_C}{(A_P/\alpha)} \right]_P - \left[ \frac{1}{(A_P/\alpha)} \frac{Vol_P}{\delta_{ew}} (P_e - P_w) \right]_P \quad (D.2)$$

$$U_E^{k,t} = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + (1-\alpha)(A_P/\alpha)U_P^{k-1,t} + A_P^0 U_P^{t-\Delta} + S_C}{(A_P/\alpha)} \right]_E - \left[ \frac{1}{(A_P/\alpha)} \frac{Vol_P}{\delta_{ew}} (P_e - P_w) \right]_E \quad (D.3)$$

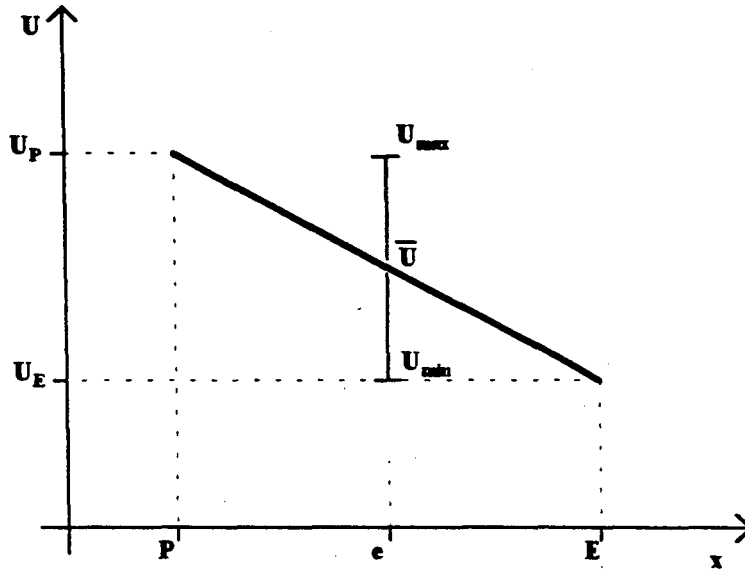


Figura D.2 - Interpolação da componente de velocidade U na face e.

O valor da velocidade  $U_e$  na face (e) é obtido pela interpolação linear dos termos das equações (D.2) e (D.3), com exceção do termo do gradiente de pressão, que é avaliado como no esquema desencontrado. Ou seja:

$$U_e = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + (1-\alpha)(A_P/\alpha)U_P^{k-1,t} + A_P^0 U_P^{t-\Delta} + S_C}{(A_P/\alpha)} \right]_e - \left[ \frac{1}{(A_P/\alpha)} \right]_e \left[ \frac{Vol_e}{\delta_{EP}} (P_E - P_P) \right] \quad (D.4)$$

onde a barra sobreposta indica interpolação linear entre os valores dos pontos P e E.  $P_P$ ,  $P_E$  são as pressões nodais em P e em E,  $\delta_{EP}$  é a distância de P a E e  $Vol_e$  é o volume associado à velocidade na face (e). Este volume é limitado pelas faces norte e sul, (n) e (s), e pelos pontos nodais P e E.

Se por um lado a expressão (D.4) pode parecer uma aproximação forte (duvidosa), principalmente em virtude da troca do termo de pressão, deve-se lembrar o seguinte: Todo o problema se resume ao cálculo da velocidade  $U_e$  na face (e), conforme ilustrado na figura D.2. A idéia mais óbvia é fazer uma interpolação linear entre as velocidades nodais  $U_P$  e  $U_E$ , o que resultaria em  $U_e = \bar{U}$  conforme a figura D.2. Se o termo de pressão não houvesse sido alterado, seria exatamente isso o que estaria sendo calculado. Entretanto, nada garante que  $U_e$  mais correto seja dado por  $\bar{U}$  (interpolação linear). Espera-se apenas que a velocidade na face deva estar entre  $U_{\max}$  e  $U_{\min}$  ( $U_P$  e  $U_E$ ), na figura D.2. Ora, alterando-se o termo de pressão como na equação (D.4), deixa-se de calcular  $U_e = \bar{U}$  e  $U_e$  passa a assumir algum outro valor entre  $U_{\max}$  e  $U_{\min}$ . Essa outra velocidade tem tanta chance de ser a mais correta na face quanto  $\bar{U}$ . A grande vantagem é que procedendo-se assim elimina-se a possibilidade da solução envolver um campo oscilatório de pressão.

A característica importante da equação (D.4) é que a velocidade na face depende da pressão em pontos vizinhos a esta face, que é a idéia básica do esquema desencontrado. Portanto, o esquema colocalizado baseia-se indiretamente no desencontrado.

Um último detalhe a ser comentado refere-se aos extremos  $U_{\max}$  e  $U_{\min}$ . Existem condições onde ocorrem velocidades interpoladas fisicamente inadmissíveis, por exemplo, o escoamento através de uma contração súbita. Nesse caso as velocidades interpoladas nas faces dos volumes adjacentes à contração assumiram valores fora da faixa  $U_{\max}$  e  $U_{\min}$ . Este fato constatado em diversos trabalhos também foi verificado presentemente. A sobre ou sub-estimativa do valor da velocidade é atribuída ao intenso gradiente de pressão existente na região da contração. Entretanto, a sobre/sub estimativa é pequena e a velocidade na face não ultrapassa muito os valores de  $U_{\max}$  e  $U_{\min}$ .

### D.3 - Interpolação de Peric et alli (1988)

Peric et alli não se preocuparam em estudar escoamentos transientes e retiraram o termo temporal das equações de conservação. A expressão utilizada por Peric et alli para avaliar a velocidade na face é igual à equação (D.4), à exceção do termo envolvendo  $\Delta t$  e  $A_P$  não envolve o termo transiente.

$$U_e = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + (1-\alpha)(A_P^*/\alpha)U_P^{k-1,t} + S_C}{(A_P^*/\alpha)} \right]_e - \left[ \frac{1}{(A_P^*/\alpha)} \right]_e \left[ \frac{Vol_e}{\delta_{EP}} (P_E - P_P) \right] \quad (D.5)$$

Com essa interpolação, o esquema colocalizado apresenta uma dependência da solução numérica em relação ao coeficiente de relaxação  $\alpha$ . Se a equação completa (D.4) for utilizada



incluindo o termo temporal, a solução numérica apresentará também uma dependência em relação ao intervalo de tempo  $\Delta t$ .

#### D.4 - Interpolação de Majumdar (1988)

Majumdar (1988) demonstrou a dependência da solução numérica com relação ao coeficiente de relaxação no cálculo das velocidades nas faces dos volumes de controle. Naquele trabalho ficou claro que essa dependência era devida aos coeficientes de sub-relaxação para as velocidades, enquanto a sub-relaxação na pressão não influencia a solução numérica. Em seu trabalho, Majumdar propôs que, somente no cálculo de interpolação das velocidades nas faces, os termos de relaxação das velocidades nodais fossem eliminados e após a avaliação de  $U_e$  fosse utilizado um termo de relaxação específico para esta velocidade na face. Assim, deixa-se de fazer uma média de velocidades com termos de relaxação embutidos, e passa-se a relaxar a própria velocidade na face com outro fator  $\alpha_2$ . Assim, a equação (D.5) foi modificada para:

$$U_e^k = \alpha_2 \left\{ \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + S_C}{A_P^+} \right]_e - \left[ \frac{1}{A_P^+} \right]_e \left[ \frac{Vol_e}{\delta_{EP}} (P_E - P_P) \right] \right\} + (1 - \alpha_2) U_e^{k-1} \quad (D.6)$$

onde o índice  $k$  denota o nível iterativo.

Note-se que na equação (D.6) os termos  $(A_P^+ / \alpha)$  foram substituídos por  $A_P$ , e que o termo  $(1 - \alpha)(A_P^+ / \alpha) U_P^{k-1,t}$  foi eliminado. Com esse esquema, Majumdar conseguiu eliminar a dependência das soluções numéricas no esquema colocalizado em relação aos coeficientes de relaxação. Presentemente utilizou-se esta idéia de Majumdar, porém constatou-se que não havia a necessidade de se utilizar fatores de relaxação  $\alpha_2$  no cálculo de  $U_e^k$  e, então, fixou-se  $\alpha_2$  com valor unitário. Foram experimentados diversos valores de  $\alpha_2$  e concluiu-se que não havia necessidade de sub-relaxar a velocidade interpolada nas faces dos V.C. Na prática este esquema de interpolação recai no esquema de Peric (1988), adota-se a relaxação  $\alpha$  como igual a unidade no momento de se efetuar a avaliação das velocidades nas faces.

No entanto, permaneceu o problema da dependência em relação ao intervalo de tempo, pois Majumdar(1988) também não considerou escoamentos não estacionários. Com as informações disponíveis na literatura não se conseguiu montar uma interpolação para o cálculo das velocidades nas faces que forneça soluções numéricas independentes de  $\Delta t$ .

## D.5 - Interpolação proposta

Constatou-se que a dependência das soluções numéricas com o intervalo de tempo  $\Delta t$  surge devido aos termos temporais,  $A_p^0 U_p^{k,t}$  e  $A_p^0 U_p^{k,t-\Delta t}$ , que aparecem na eq. (D.4) decorrente da média de cada equação do movimento. Em regime permanente, a velocidade média na face (e) do V. C., gerada com termos transientes de acordo com a eq. (D.4), não se cancela com o valor médio entre as velocidades nodais no instante anterior como no esquema desencontrado para cada componente nodal de velocidade.

Para entender como a dependência em relação ao intervalo de tempo será eliminada, é conveniente reescrever a equação (D.1) conforme segue

$$(A_p^+ + A_p^0)U_p^{k,t} = \sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + A_p^0 U_p^{k,t-\Delta t} + S_c - \frac{Vol_p}{\delta_{ex}} (P_e - P_w) \quad (D.7)$$

Na expressão acima eliminaram-se os termos de relaxação, pois os mesmos não serão levados em conta para a avaliação da velocidade na face, analogamente à proposta de Majumdar.

Na nova proposta de interpolação, separa-se o termo  $A_p^0 U_p^{k,t}$  da equação (D.7) colocando-o no segundo membro da equação, de forma que os termos temporais,  $A_p^0 U_p^{k,t}$  e  $A_p^0 U_p^{k,t-\Delta t}$ , se subtraíam do lado direito da equação, compensando as variações com o tempo. Desta proposta surge a equação (D.8) a seguir,

$$U_p^{k,t} = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + A_p^0 (U_p^{k,t-\Delta t} - U_p^{k,t}) + S_c}{A_p^+} \right] - \left[ \frac{1}{A_p^+} \frac{Vol_p}{\delta_{ex}} (P_e - P_w) \right]_p \quad (D.8)$$

Fazendo-se o mesmo procedimento para a velocidade  $U_E^{k,t}$ , tem-se uma nova interpolação para o cálculo da velocidade na face (e),  $U_e$ , dada por:

$$U_e = \left[ \frac{\sum A_{viz} U_{viz}^{k,t} + A_p^0 (U_p^{k,t-\Delta t} - U_p^{k,t}) + S_c}{A_p^+} \right]_e - \left[ \frac{1}{A_p^+} \right]_e \left[ \frac{Vol_e}{\delta_{ex}} (P_E - P_P) \right] \quad (D.9)$$

As equações (D.8) e (D.9) acima são propostas apresentadas por Langer et alli (1993a), como forma de se eliminar as dependências das soluções numéricas, obtidas com o esquema colocalizado, em relação aos coeficientes de relaxação e ao intervalo de tempo.

Note-se que na equação (D.9) a presença do intervalo de tempo é restrita ao termo  $A_p^0$ . O termo  $A_p^+$  não contém informações sobre o intervalo de tempo. É fácil notar que no caso especial de um escoamento em regime permanente, quando o algoritmo convergir,  $U_p^t = U_p^{t-\Delta t}$ , e o termo

que envolve o intervalo de tempo se cancela. Assim, para um campo convergido, o cálculo das velocidades nas faces independe do intervalo de tempo utilizado e, conseqüentemente, a solução final também. Se a solução numérica for um escoamento periódico, o termo que contém o intervalo de tempo não se anula. Então, a informação sobre a variação temporal de  $U$  é levada para o cálculo da velocidade na face, como seria de se esperar, a fim de que o cálculo da velocidade na face seja coerente com as velocidades nodais.

Quanto aos coeficientes de relaxação, a solução usada aqui pode ser considerada como uma variante da proposta por Majumdar. A diferença é que aqui optou-se por não relaxar a velocidade na face, haja visto que as soluções encontradas independem de qualquer relaxação utilizada. Essa simplificação não apresentou problemas na convergência do algoritmo numérico, pelo contrário, acelerou um pouco o processo iterativo, sendo então adotada no presente trabalho.

Através da metodologia proposta conseguiu-se a independência das soluções numéricas estacionárias em relação ao incremento de tempo  $\Delta t$  utilizado para convergência do processo iterativo.

Exemplos de escoamentos transientes são apresentados nos capítulos 6 e 7. No caso do escoamento radial com alimentação axial, ocorreu uma rápida desestabilização numérica acentuada pela correção no termo transiente proposta neste apêndice. Observou-se que o critério de convergência do processo iterativo transiente (resíduo da equação da continuidade) deveria ser muito rígido para esta correção funcionar a contento. Se o resíduo não for bem pequeno, o processo iterativo acaba divergindo. Atribui-se esta desestabilização ao decréscimo do coeficiente  $A_p$  de cada velocidade nodal, quando são isolados os dois termos transientes no lado direito da equação discretizada (eq. (D.8)), para depois se fazer a média para a velocidade nas faces, conforme eq. (D.9). Quando o processo iterativo em cada instante de tempo incrementado não está devidamente convergido, introduz-se um erro na subtração entre o valor novo e o antigo,  $U_p^{t-\Delta t} - U_p^{k,t}$ . A idéia central da proposta de Langer et alii (1993a) é subtrair termos iguais; pelo menos devem ser iguais quando se atingir a convergência do processo iterativo. Por isso, restringe-se a aplicação deste modelo corrigido a escoamentos estacionários. Escoamentos transientes são resolvidos no presente trabalho com modelos sem correção do termo transiente, tomando-se o cuidado de não alterar o incremento de tempo durante a tomada de resultados. A discretização em malha colocada, em regime transiente, necessita de maiores investigações e foge ao escopo do presente trabalho.